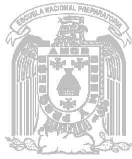
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL



Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

CÁTEDRAS ESPECIALES



FUNCIONES

UNIDAD I

Las magnitudes que caracterizan un fenómeno dado pueden quedar completamente determinadas por los valores de otras. Estas interdependencias fueron las que dieron origen al concepto de función porque gran parte de los fenómenos que se observan en la naturaleza se pueden relacionar unos con otros a través de correspondencias.

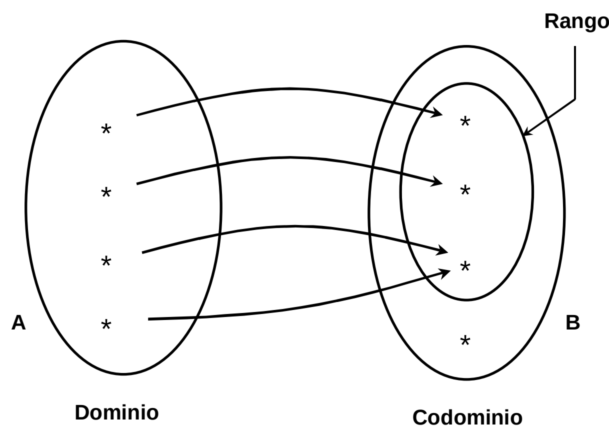
I.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES

Una función se refiere a una asignación o correspondencia de un conjunto a otro. Su definición formal es la siguiente:

Una *función* es una terna constituida por:

1. Un conjunto A llamado *dominio* de la función
2. Un conjunto B llamado *codominio* de la función
3. Una *regla de correspondencia* que posee tres características
    a) A todo elemento del dominio se le puede asociar un elemento del codominio
    b) Ningún elemento del dominio puede quedarse sin un asociado en el codominio
    c) Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

Se denota como: $f : A \to B$



El dominio, denotado por D_f, de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, es decir, son todos aquellos números para los cuales la función tiene sentido (también se conoce como campo de variación).

Al elemento que se obtiene en el codominio después de aplicar la regla de correspondencia a un elemento del dominio recibe el nombre de *imagen*. Al conjunto de todas las imágenes se le conoce como *rango*[1], *denotado por* R_f.

[1] Al rango también se le conoce como *recorrido*.

Ejemplo.
Sea un conjunto de siete muchachos y otro conjunto sus edades respectivas en años:

NOMBRE	EDAD
Alberto	17
Clarissa	16
Diana	19
Ernesto	17
Fabiola	16
Karen	19
Manuel	15

La tabla muestra que a cada muchacho le corresponde una edad y cumple con las condiciones de función, por lo que su dominio es: { Alberto, Clarissa, Diana, Ernesto, Fabiola, Karen, Manuel } y el rango es { 15,16,17,19 }.

Si se denota a x como un elemento en el dominio de la función, entonces el elemento en el recorrido que f asocia con x, es la imagen de x bajo la función f. Esto es: f (Manuel) = 15, f (Clarissa) = f (Fabiola) = 16, f (Alberto) = f (Ernesto) = 17 y f (Diana) = f (Karen) = 19.

En términos de variables, una función también se puede definir de la siguiente forma:

Se dice que una variable y es función de otra x, cuando ambas están relacionadas de forma que para cada valor de x perteneciente a su campo de variación, le corresponde sólo uno de y. La variable y recibe el nombre de *variable dependiente*, mientras que x es la *variable independiente*.

Lo anterior puede expresarse simbólicamente de la siguiente forma: $y = f(x)$

Esta manera de representar una función es especialmente útil, pues se puede saber con certeza el valor que toma la variable dependiente para cualquier valor que tome la variable independiente. Esto posibilita la construcción de una tabla de valores de la misma y su respectiva gráfica, debido a que cada pareja de valores (x, y) de la tabla que se calcule representa un punto del plano cartesiano.

Por tanto, una función puede ser presentada de múltiples maneras: una expresión matemática del tipo $y = f(x)$, una tabla de valores, una gráfica o incluso una frase que exprese la relación entre ambas variables[2].

Para encontrar el dominio y el rango de una función es necesario efectuar una inspección particular que analice su comportamiento, para lo cual se recomienda: para el dominio, que esté despejada la variable dependiente y para el rango que lo esté la variable independiente. A partir de esas expresiones, se efectúa un análisis que consiste básicamente en determinar los valores reales de la variable no despejada que hacen reales los valores de la variable despejada, obteniendo así el dominio y el rango respectivamente.

Ejemplos.
Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones:
1) $f(x) = x^2 + 5$
Solución:
La función está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:
$D_f = (-\infty, \infty)$

[2] No todas las funciones son de una sola variable independiente. En realidad, el concepto de función es más general. La definición más completa de función es la siguiente: Una función es una ley que relaciona una o más variables independientes con otra variable dependiente de forma unívoca, es decir, que a cada conjunto de valores formado por un valor de cada una de las variables independientes le corresponde sólo un valor de la variable dependiente. Una función de varias variables tendría este aspecto: $y = f(x_1, x_2, x_3. \cdots, x_n)$. A lo largo de este libro, sólo se analizarán funciones de una variable.

Despejando x para obtener el rango:

$$y = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad y - 5 = x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y-5} = x$$

Resolviendo la desigualdad: $y - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq 5$

$\therefore \quad R_f = [0, \infty)$

2) $f(x) = |x|$

Solución:

La función está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:

$D_f = (-\infty, \infty)$

Por definición de valor absoluto, el valor más pequeño que puede tener y es cero:

$\therefore \quad R_f = [0, \infty)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Solución:

La función está definida para todo valor de x, exceptuando $x = -3$ y $x = 3$, ya que la división por cero no existe:

$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

Despejando x para obtener el rango:

$$y = \frac{1}{x^2 - 9} \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 9)y = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y} + 9 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{y} + 9}$$

Resolviendo la desigualdad: $\dfrac{1}{y} + 9 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{y} \geq -9$

Si $y > 0$: $y \geq -\dfrac{1}{9}$, entonces su intersección es: $y > 0$.

Si $y < 0$: $y \leq -\dfrac{1}{9}$, entonces su intersección es: $y \leq -\dfrac{1}{9}$.

$\therefore \quad R_f = \left(-\infty, -\dfrac{1}{9}\right] \cup [0, \infty)$

4) $f(x) = \sqrt{5x - 20}$

Solución:

El radicando no puede ser negativo, así que: $5x - 20 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5x \geq 20 \quad \Rightarrow \quad x \geq \dfrac{20}{5} \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$

$D_f = [4, \infty)$

Para obtener el rango, se observa que el valor mínimo que se puede obtener de una raíz cuadrada es cero, así que: $y \geq 0$.

$\therefore \quad R_f = [0, \infty)$

5) $f(x) = 2sen\, x$

Solución:

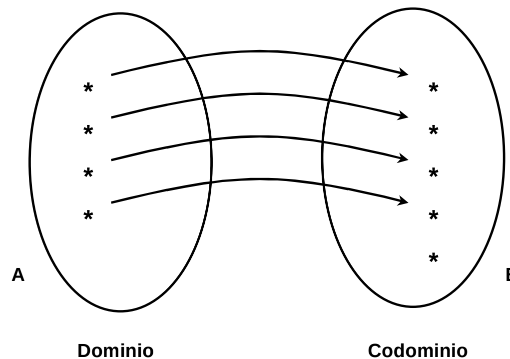
La función seno está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:

$D_f = (-\infty, \infty)$

El rango de la función seno está definida está definida para $-1 \leq x \leq 1$, pero como tiene una amplitud de dos, este rango se duplica:
$\therefore \quad R_f = [-2, 2]$

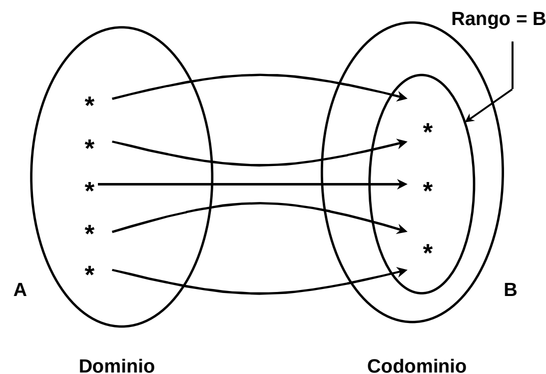
I.2 FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

- Una función es *inyectiva* cuando a diferentes elementos del dominio le corresponden distintos elementos del codominio, y recíprocamente, a distintos elementos del codominio se le asocian diferentes elementos del dominio. También se le conoce como función *uno a uno*.



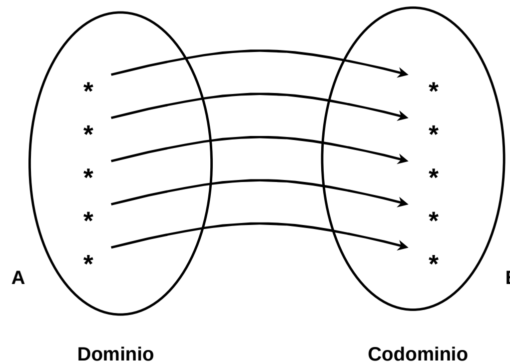
Ejemplo.
La función $y = 2^x$ tiene como dominio al conjunto de los números reales y su rango son los números reales positivos (por tanto, excluye a todos los reales negativos y al cero).

- Una función es *suprayectiva* si cualquier elemento del codominio es imagen de por lo menos un elemento del dominio de la función. También se le conoce como *sobreyectiva*.



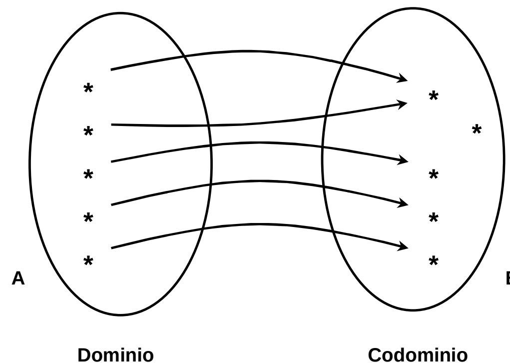
Ejemplo.
La función $y = x^3 - 3x$ tiene como dominio al conjunto de los números reales y su rango también son los números reales. Pero la función presenta un crecimiento hasta llegar a $y = 2$, después un decrecimiento hasta $y = -2$ y vuelve a crecer. Por lo tanto, existe un intervalo cuyos valores del dominio tienen la misma imagen, por lo tanto no es una función uno a uno.

- Una función es *biyectiva* si cumple con ser inyectiva y suprayectiva. La regla de correspondencia es *biunívoca*.



Ejemplo.
La función $y = 6x - 2$ tiene como dominio y rango al conjunto de los números reales. Cumple con ser inyectiva y suprayectiva.

Pueden existir funciones que no sean ni inyectivas ni suprayectivas, es decir, en donde la asociación no sea uno a uno y además que no cumplan que el rango y el codominio sean iguales, como por ejemplo:



En general, se pueden efectuar innumerables correspondencias entre dos conjuntos, sin embargo, sólo serán funciones aquellas que cumplan con las condiciones definidas. Las que no las cumplan sólo serán relaciones.

I.3 TIPOS DE FUNCIONES

Función constante

Es una función en que siempre toma el valor k, que es una constante:

$$f(x) = k$$

Su dominio son todos los números reales.

Función identidad

Es una función donde la variable dependiente toma el mismo valor que tiene la variable independiente:

$$f(x) = x$$

Su dominio son todos los números reales.

Funciones algebraicas

Son las funciones que se obtienen cuando se efectúan un número finito de sumas, restas y productos con las funciones constante e identidad. Su dominio son todos los números reales.

Funciones polinómicas

Son funciones de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales y los exponentes son números naturales.
El dominio de todas las funciones polinómicas son todos los números reales.

Funciones lineales

Son funciones polinómicas de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

La representación gráfica de una función lineal es una recta donde m representa la pendiente (grado de inclinación) y b representa la ordenada al origen (cruce de la recta en el eje y). Por ser también una función polinómica, su dominio son todos los números reales.

Funciones cuadráticas

Son funciones polinómicas de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes y a es diferente de cero. La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ o que se abre hacia abajo si $a < 0$. Al ser función polinómica, su dominio son todos los números reales.

Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas. Esto es, q es una función racional si para todo x en el dominio, dados los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, se tiene:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de una función racional consiste de todos los números reales excepto los ceros (o raíces) del polinomio en el denominador, ya que la división por cero no está definida.

Funciones de proporcionalidad inversa

Este tipo de funciones relaciona las variables x y y a través de expresiones del tipo:

$$y = \frac{k}{x}$$

siendo k un número real cualquiera distinto de cero. La gráfica de este tipo de funciones es una curva denominada hipérbola equilátera. El dominio de este tipo de funciones son todos los números reales exceptuando el cero.

Funciones irracionales

Son aquellas funciones algebraicas y/o racionales en que interviene la operación de radicación. A fin de que este tipo de funciones existan, el dominio depende de la naturaleza de las raíces y, en su caso, de los ceros del denominador.

Funciones trascendentes

Son aquellas funciones que no son algebraicas. Incluyen las funciones trigonométricas directas, las trigonométricas inversas, las exponenciales y las logarítmicas.

Funciones periódicas

Una función es periódica si cumple que:

$$f(x) = f(x+p)$$

donde p es un número real diferente de cero, llamado periodo.

Funciones par e impar

Una función par es aquella que cumple con:

$$f(x) = f(-x)$$

Una función impar es aquella que cumple con:

$$f(-x) = -f(x)$$

I.4 ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones de x con dominios D_f y D_g respectivos.

- La *suma de funciones* se define como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

Ejemplo.

$f(x) = x^2$; $g(x) = -2x + 5$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2x + 5$

$D_f = (-\infty, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

$$D_{f(x)+g(x)} = D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$$

- La *resta de funciones* se define como $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

Ejemplo.

$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-x^2}$

$D_f = [0, \infty)$

$D_g = [-3, 3]$

$D_{f(x)-g(x)} = D_f \cap D_g = [0, 3]$

- El *producto de funciones* se define como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

Ejemplo.

$f(x) = 3x$; $g(x) = \dfrac{1}{12-2x}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{3x}{12-2x}$

$D_f = (-\infty, \infty)$

$D_g = (-\infty, 6) \cup (6, \infty)$

$D_{f(x) \cdot g(x)} = D_f \cap D_g = (-\infty, 6) \cup (6, \infty)$

- El *cociente de funciones* se define como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y su dominio es $D_f \cap D_g$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo.

$f(x) = \dfrac{11}{2-x}$; $g(x) = 9x$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{11}{(2-x)}}{9x} = \frac{11}{18x - 9x^2}$$

$D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

$D_{\frac{f(x)}{g(x)}} = D_f \cap D_g = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

- La *composición de funciones* se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y su dominio es el conjunto de todos los valores de x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f. Esto significa que: $D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

Ejemplos.

Dadas las siguientes funciones, obtener la composición $f \circ g$ y determinar su dominio.

1) $f(x) = \sqrt{x-8}$; $g(x) = x - 2$

Solución.

$D_f = [8, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f :

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \sqrt{(x-2)-8} = \sqrt{x-10}$

en esta función el dominio es: $D_f = [10, \infty)$

$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

$D_{f \circ g} = \{(-\infty, \infty) \cap [10, \infty)\} = [10, \infty)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-25}$; $g(x) = x^2$

Solución.

$D_f = (-\infty, 25) \cup (25, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{(x^2)-25} = \frac{1}{x^2-25}$$

en esta función el dominio es: $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$

$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

$D_{f \circ g} = \{(-\infty, \infty) \cap (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)\} = (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$

Es importante señalar que $f \circ g \neq g \circ f$. En el primer caso, primero se aplica la función g y después f . En el segundo caso, primero se aplica la función f y después g .

Ejemplo.

Dadas $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \sqrt{4+x}$, obtener $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución.

a) $D_f = (-\infty, 1]$

$D_g = [-4, \infty)$

Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f :

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{4+x}\right) = \sqrt{1-\sqrt{4+x}}$

en esta función el dominio es: $[-4, -3]$

$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

$D_{f \circ g} = \{[-4, \infty) \cap [-4, -3]\} = [-4, -3]$

b) $D_f = (-\infty, 1]$

$D_g = [-4, \infty)$

Para obtener la composición $g \circ f$ se sustituye x por $f(x)$ en g :

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f\left(\sqrt{1-x}\right) = \sqrt{4+\sqrt{1-x}}$

en esta función el dominio es: $(-\infty,1]$

$D_{g\circ f}=\{\,x\in D_f \mid f(x)\in D_g\,\}$

$D_{g\circ f}=\{(-\infty,1]\cap(-\infty,1]\}=(-\infty,1]$

$\therefore \quad f\circ g\neq g\circ f$

Ejemplos.

Obtener $f\circ g$, $D_{f\circ g}$, $g\circ f$, y $D_{g\circ f}$ si:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

Solución.

$D_f=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

$D_g=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}-1}=\frac{1}{\frac{x-1-x-1}{x+1}}=\frac{x+1}{-2}$$

en esta función el dominio es: $(-\infty,\infty)$

pero como $D_{f\circ g}=\{\,x\in D_g \mid g(x)\in D_f\,\}$, entonces:

$D_{f\circ g}=\{\,(-\infty,\infty)\cap[(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)]\,\}=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

$$(g\circ f)(x)=\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\frac{1}{x-1}+1}=\frac{\frac{1-x+1}{x-1}}{\frac{1+x-1}{x-1}}=\frac{2-x}{x}$$

en esta función el dominio es: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

pero como $D_{g\circ f}=\{\,x\in D_f \mid f(x)\in D_g\,\}$, entonces:

$D_{g\circ f}=\{\,[(-\infty,0)\cup(0,\infty)]\cap[(-\infty,1)\cup(1,\infty)]\,\}=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$

Solución.

$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$

$D_g=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\frac{1}{x-3}+2}=\frac{1}{\frac{1+2x-6}{x-3}}=\frac{x-3}{2x-5}$$

para esta expresión el dominio es: $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$

pero como $D_{f\circ g}=\{\,x\in D_g \mid g(x)\in D_f\,\}$, entonces:

$$D_{f\circ g}=\left\{\,[(-\infty,3)\cup(3,\infty)]\cap\left[\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)\right]\right\}=\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},3\right)\cup(3,\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 3} = \frac{1}{\frac{1-3x-6}{x+2}} = \frac{x+2}{-3x-5}$$

para esta expresión el dominio es: $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}, \infty\right)$

pero como $D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in D_g \right\}$, entonces:

$$D_{g \circ f} = \left\{ [(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)] \cap \left[\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}, \infty\right) \right] \right\} = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{5}{3}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}, \infty\right)$$

I.5 MODELADO DE FUNCIONES

Un modelo matemático se define como una descripción desde el punto de vista de las Matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real, cuyo objetivo es entenderlo ampliamente.

La mayoría de las funciones describen comportamientos de fenómenos o características de problemas que involucran a múltiples variables. Sin embargo, muchas veces existen formas de expresar todas las variables en términos de una sola a fin de simplificar su análisis.

El proceso de modelado de funciones es el siguiente:

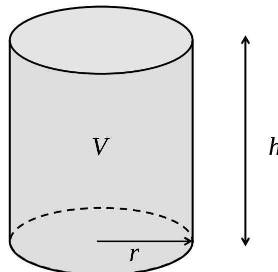
1. Leer claramente el problema e identificar la función buscada.
2. Hacer un dibujo que muestre las características por modelar
3. Anotar los datos del problema y establecer las fórmulas que son conocidas.
4. Expresar todas las variables en términos de la variable pedida a través de un manejo algebraico.
5. Expresar el comportamiento de la función en términos de la variable pedida.

Es importante mencionar que un modelo matemático no es completamente exacto con problemas de la vida real, de hecho, se trata de una idealización.

Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real. Los siguientes ejemplos muestran algunos casos típicos de modelaciones a través de funciones.

Ejemplos.
1) Expresar el volumen V de un cilindro como función del radio r si su altura es del doble de su radio.

Solución.
Dibujando el cilindro:



El volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h \quad _(1)$

La altura es el doble del radio, así que: $h^2 = 2r \quad _(2)$

Sustituyendo en (1) se obtiene la expresión pedida: $V(r) = \pi r^2 (2r) = 2\pi r^3$

2) Expresar el área A de un rectángulo como función de la base b, si se sabe que su perímetro es de $100\ cm$.

Solución.

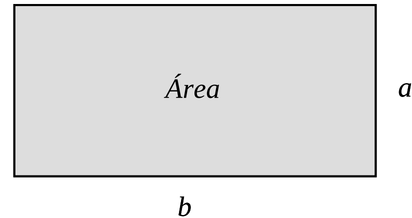
El perímetro de un rectángulo está dado por: $P = 2a + 2b \quad _(1)$

Sustituyendo $P = 100$ en (1):

$2a + 2b = 100$

Como se quiere expresar en términos de b,
se despeja la altura a:

$$2a + 2b = 100 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{100 - 2b}{2} = 50 - b \quad _(2)$$



El área de un rectángulo es: $A = ab \quad _(3)$

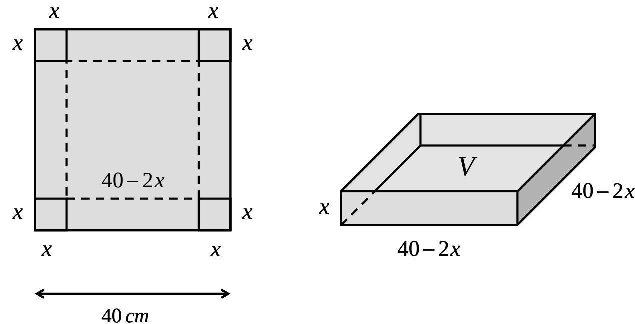
Sustituyendo (2) en (3) se tiene: $A = (50 - b)b$

Por lo que la expresión buscada es: $A(b) = 50 - b^2$

3) Se dispone de una cartulina cuadrada $40\ cm$ de lado y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. Expresar el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado x.

Solución.

Haciendo una figura, se tiene:



La longitud de cada lado de la caja es: $40 - 2x$

El volumen de la caja es: $V = A \cdot x$

$A = (40 - 2x)^2 x = (1600 - 160x + 4x^2)x$

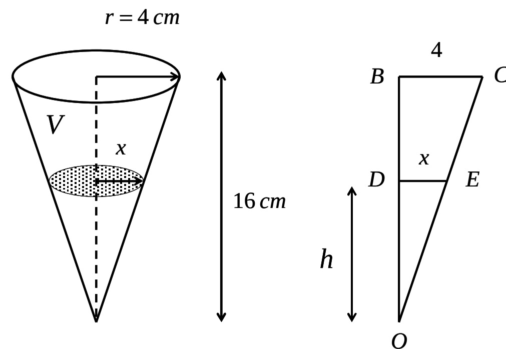
Por lo que la expresión buscada es: $A(x) = 4x^3 - 160x^2 - 1600x$

4) Expresar el volumen V de agua como función de la altura h en un instante cualquiera de un cono circular recto invertido de $4\ cm$ de radio y de $16\ cm$ de altura.

Solución.

Haciendo una figura, se tiene:

El volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad _(1)$



Por la semejanza de los triángulos ODE y OBC se tiene: $\frac{16}{4} = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = 4x \quad _(2)$

Despejando x de (2): $x = \frac{h}{4}$

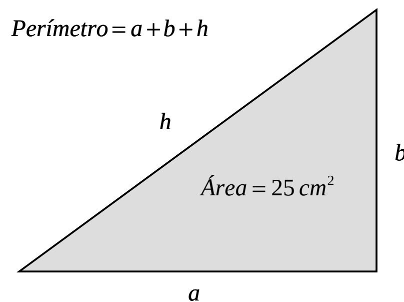
El volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h \quad _(3)$

Sustituyendo r por el valor de x en (1) se obtiene: $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{16} h$

Por lo que la expresión pedida es: $V(h) = \frac{1}{48}\pi h^3$

5) Expresar la hipotenusa h de un triángulo con área de $25\ cm^2$ como función de su perímetro P.

Solución.
Dibujando el triángulo rectángulo:



El Teorema de Pitágoras establece que: $h^2 = a^2 + b^2 \quad _(1)$

El área de un triángulo está dada por: $A = \frac{ab}{2} \quad _(2)$

El perímetro P del triángulo está dado por: $P = a + b + h \quad _(3)$

Se sabe que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

Comparando con (1) se tiene: $h^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad _(4)$

De (2): $\frac{ab}{2} = 25 \quad \Rightarrow \quad ab = 50 \quad \Rightarrow \quad 2ab = 100$

Sustituyendo en (4): $h^2 = (a+b)^2 - 100 \quad _(5)$

De (3): $P - h = a + b \quad \Rightarrow \quad (P-h)^2 = (a+b)^2 \quad -(6)$

Sustituyendo en (5): $h^2 = (P-h)^2 - 100$

$\Rightarrow \quad h^2 = P^2 - 2Ph + h^2 - 100 \quad \Rightarrow \quad 0 = P^2 - 2Ph - 100$

$\Rightarrow \quad 2Ph = P^2 - 100$

despejando h se obtiene la expresión pedida: $h(P) = \frac{P^2 - 100}{2P}$

I.6 FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA EXPLÍCITA E IMPLÍCITA

Una función está expresada en forma *explícita* si una de las variables está despejada. Por ejemplo: $y = \frac{4x^2 - 7x}{11x + 8}$.

Cuando una función, definida en el dominio de sus variables, se escribe de la forma $f(x, y) = 0$, se dice que y es una función implícita de x, o que x es una función implícita de y. En otras palabras, una función está expresada en forma *implícita* si ninguna de las variables está despejada. Por ejemplo: $2x^2y - 5x - 18y + 10 = 0$.

No existe una regla definida para transformar una función expresada en forma implícita en explícita, por ello, de forma particular es necesario aplicar recursos matemáticos conducentes a despejar la variable dependiente.

Ejemplos.
Transformar las siguientes funciones expresadas en forma implícita a explícita:

1) $9xy - 2x - 3y - 16 = 0$
Solución:
dejando los términos con y en el primer miembro:
$9xy - 3y = 2x + 16$
factorizando y:
$y(9x - 3) = 2x + 16$
despejando y:
$y = \frac{2x + 16}{9x - 3}$

2) $4x^2y - 7x^3 - 2xy + 17x + 6y + 15 = 0$
Solución:
dejando los términos con y en el primer miembro:
$4x^2y - 2xy + 6y = 7x^3 - 17x - 15$
factorizando y:

$$y\left(4x^2-2x+6\right)=7x^3-17x-15$$

despejando y :

$$y=\frac{7x^3-17x-15}{4x^2-2x+6}$$

3) $5y^2+8x-10x^3y^2-13=0$

Solución:

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$5y^2-10x^3y^2=-8x+13$$

factorizando y :

$$y^2\left(5-10x^3\right)=-8x+13$$

se despeja y^2 :

$$y^2=\frac{-8x+13}{5-10x^3}$$

extrayendo la raíz cuadrada positiva se obtiene y :

$$y=\sqrt{\frac{-8x+13}{5-10x^3}}$$

4) $\frac{5y-6x}{4y-1}+12x^2=0$

Solución:

multiplicando por el denominador:

$$5y-6x+12x^2\left(4y-1\right)=0\left(4y-1\right)$$

eliminando los paréntesis:

$$5y-6x+48x^2y-12x^2=0$$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$5y+48x^2y=12x^2+6x$$

factorizando y :

$$y\left(5+48x^2\right)=12x^2+6x$$

despejando y :

$$y=\frac{12x^2+6x}{5+48x^2}$$

5) $\frac{3x}{y}+2y-4=0$

Solución:

multiplicando por y :

$$3x+2y^2-4y=0$$

ordenando con respecto a y :

$$2y^2-4y+3x=0$$

esto representa una ecuación de segundo grado donde:

$$a=2,\quad b=-4,\quad c=3x$$

aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y tomando la raíz positiva:

$$y=\frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4(2)(3x)}}{2(2)}=\frac{4+\sqrt{16-24x}}{4}$$

reduciendo:

$$y=1+\sqrt{\frac{16-24x}{16}}$$

finalmente:

$$y=1+\sqrt{1-1.5x}$$

6) $9x-\frac{4+7\cos y^3}{5}=0$

Solución:
rescribiendo la igualdad:

$$\frac{4+7\cos y^3}{5}=9x$$

multiplicando por 5:

$$4+7\cos y^3=45x$$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$7\cos y^3=45x-4$$

$$\cos y^3=\frac{45x-4}{7}$$

aplicando la función inversa del coseno:

$$\cos^{-1}\left(\cos y^3\right)=\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)$$

$$y^3=\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)$$

extrayendo la raíz cúbica se obtiene y :

$$y=\sqrt[3]{\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)}$$

7) $2\ln xy-4x^2+12=0$

Solución:
ordenando:

$$2\ln xy=4x^2-12$$

$$\ln xy=\frac{4x^2-12}{2}=2x^2-6$$

aplicando la propiedad del producto de logaritmos:

$$\ln x+\ln y=2x^2-6$$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$\ln y=2x^2-6-\ln x$$

aplicando la función exponencial:

$$e^{\ln y}=e^{\left(2x^2-6-\ln x\right)} \quad \Rightarrow \quad y=e^{\left(2x^2-6-\ln x\right)}$$

I.7 FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Sea una variable t denominada *parámetro*. Si $x = f(t)$ y $y = f(t)$ son dos funciones con el mismo dominio, entonces se dice que las dos ecuaciones forman un conjunto de ecuaciones paramétricas.

Las coordenadas (x, y) de un punto de una curva pueden ser funciones del parámetro, ya que para cada valor que tome t se tendrá un punto P. Por ejemplo, si se tabula a las ecuaciones paramétricas $\left.\begin{matrix} x = 3t \\ y = t^2 \end{matrix}\right\}$ se tiene:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-9	-6	-3	0	3	6	9
y	9	4	1	0	1	4	9
$P(x, y)$	(-9,9)	(-6,4)	(-3,1)	(0,0)	(3,1)	(6,4)	(9,9)

Esto significa que las ecuaciones representan a la función $y = \frac{x^2}{9}$.

Es importante señalar que no todas las ecuaciones paramétricas representan funciones.

Para transformar una función expresada por ecuaciones paramétricas en una función explícita de la forma $y = f(x)$ se despeja de ambas el parámetro, se igualan las ecuaciones y se procede a despejar la variable dependiente.

Ejemplos.
Transformar las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica en forma explícita:

1) $\left.\begin{matrix} x = 3t \\ y = t^2 \end{matrix}\right\}$

Solución:
despejando t de la primera ecuación:

$$t = \frac{x}{3} \qquad _\,[A]$$

despejando t de la segunda ecuación:

$$t = \sqrt{y} \qquad _\,[B]$$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{x}{3} = \sqrt{y}$$

elevando al cuadrado:

$$y = \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{9}$$

Nótese como se obtiene el mismo resultado si se sustituye $[A]$ en la segunda ecuación.

2) $\left.\begin{matrix} x = t^2 + 2t \\ y = t - 2 \end{matrix}\right\}$

Solución:
de la primera ecuación, se suma y resta uno para completar el trinomio cuadrado perfecto:
$x = t^2 + 2t + 1 - 1 = (t+1)^2 - 1 \qquad _ [A]$
despejando t:
$t = \sqrt{x+1} - 1$
despejando t de la segunda ecuación:
$t = y + 2 \qquad _ [B]$
igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:
$\sqrt{x+1} - 1 = y + 2$
$y = \sqrt{x+1} - 3$

3) $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \sqrt{t-6} \end{array}\right\}$
Solución:
despejando t de la primera ecuación:
$t = \dfrac{1}{x} \qquad _ [A]$
despejando t de la segunda ecuación:
$t = y^2 + 6 \qquad _ [B]$
igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:
$\dfrac{1}{x} = y^2 + 6$
extrayendo la raíz cuadrada positiva:
$y = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 6}$

4) $\left.\begin{array}{l} x = 2t + 4 \\ y = 8t - 3 \end{array}\right\}$
Solución:
despejando t de la primera ecuación:
$t = \dfrac{x-4}{2} \qquad _ [A]$
despejando t de la segunda ecuación:
$t = \dfrac{y+3}{8} \qquad _ [B]$
igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:
$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+3}{8}$
eliminando los denominadores:
$8(x-4) = 2(y+3)$
$8x - 32 = 2y + 6$

$$y=\frac{8x-38}{2}=4x-19$$

5) $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2-5t} \\ y=(4t+7)^2 \end{array}\right\}$

Solución:
despejando t de la primera ecuación:

$$2-5t=\frac{1}{x}$$

$$t=\frac{\frac{1}{x}-2}{-5} \qquad _\,[A]$$

despejando t de la segunda ecuación:

$$t=\frac{\sqrt{y}-7}{4} \qquad _\,[B]$$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{\frac{1}{x}-2}{-5}=\frac{\sqrt{y}-7}{4}$$

multiplicando ambos miembros por -20:

$$4\left(\frac{1}{x}-2\right)=-5\left(\sqrt{y}-7\right)$$

$$\frac{4}{x}-8=-5\sqrt{y}+35$$

$$y=\left(\frac{\frac{4}{x}-43}{-5}\right)^2=\left(\frac{43x-4}{5x}\right)^2$$

6) $\left.\begin{array}{l} x=(7t-2)^3 \\ y=t^2-6t+11 \end{array}\right\}$

Solución:
despejando t de la primera ecuación:

$$t=\frac{\sqrt[3]{x}+2}{7} \qquad _\,[A]$$

en la segunda ecuación, se resta y se suma dos para completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$y=t^2-6t+11-2+2=t^2-6t+9+2=(t-3)^2+2$$

despejando t:

$$t=\sqrt{y-2}+3 \qquad _\,[B]$$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{\sqrt[3]{x}+2}{7}=\sqrt{y-2}+3$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}+2}{7}-3=\sqrt{y-2}$$

$$y=\left(\frac{\sqrt[3]{x}-19}{7}\right)^2+2$$

I.8 FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función biyectiva con dominio A y rango B. Entonces su *función inversa* f^{-1} tiene domino B y rango A y la define:

$$f^{-1}(y)=x \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=y$$

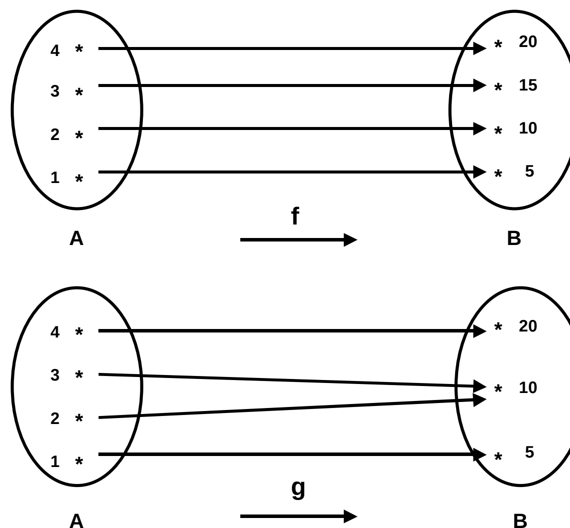
para cualquier y en B.

Esto significa que:

Dominio de f^{-1} = Rango de f

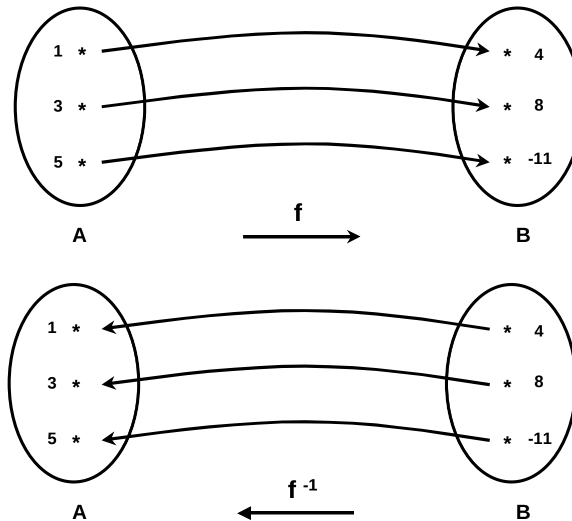
Rango de f^{-1} = Dominio de f

Nótese como no todas las funciones tienen inversa, sólo aquellas que sean biyectivas. En los siguientes diagramas se aprecia que f si tiene inversa y g no tiene inversa, ya que no cumple con la condición de ser función biyectiva.



Nota: En la notación $f^{-1}(x)$ el índice -1 no tiene el significado en álgebra como exponente. Esto es: $f^{-1}(x)\neq\frac{1}{f(x)}$.

Ejemplo.
Si $f(1)=4, \quad f(3)=8 \quad y \quad f(5)=-11$, encontrar $f^{-1}(4), \quad f^{-1}(8) \quad y \quad f^{-1}(-11)$
Solución.
A partir de la definición de función inversa, se tiene que:
$f^{-1}(4)=1$ porque $f(1)=4$
$f^{-1}(8)=3$ porque $f(3)=8$
$f^{-1}(-11)=5$ porque $f(5)=-11$
El siguiente diagrama muestra las correspondencias:



En la función inversa se intercambian cada una de las parejas ordenadas que constituyen a la función original: si $(x, y)\in f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (y, x)\in f^{-1}(x)$

Para obtener la función inversa de una función biyectiva:
1) Se escribe $y = f(x)$
2) Se intercambia x por y
3) Se despeja y para encontrar $f^{-1}(x)$.

Ejemplos.
Encontrar la función inversa de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{x+4}{10}$
Solución:
$$y=\frac{x+4}{10}$$
$$x=\frac{y+4}{10}$$
$$10x = y+4$$
$$y=10x-4$$

$f^{-1}(x) = 10x - 4$

2) $f(x) = x^3 - 5$

Solución:

$y = x^3 - 5$

$x = y^3 - 5$

$x + 5 = y^3$

$y = \sqrt[3]{x+5}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$

3) $f(x) = \sqrt{2x+9}$

Solución:

$y = \sqrt{2x+9}$

$x = \sqrt{2y+9}$

$x^2 = 2y + 9$

$y = \frac{x^2 - 9}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{2}$

4) $f(x) = \frac{8}{3-x}$

Solución:

$y = \frac{8}{3-x}$

$x = \frac{8}{3-y}$

$(3-y)x = 8$

$3x - xy = 8$

$3x - 8 = xy$

$y = \frac{3x-8}{x}$

$f^{-1}(x) = \frac{3x-8}{x}$

5) $f(x) = \left(6\sqrt{x} - 7\right)^5$

Solución:

$y = \left(6\sqrt{x} - 7\right)^5$

$x = \left(6\sqrt{y} - 7\right)^5$

$$\sqrt[5]{x} = 6\sqrt{y} - 7$$

$$\sqrt[5]{x} + 7 = 6\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt[5]{x} + 7}{6}$$

$$y = \left(\frac{\sqrt[5]{x} + 7}{6} \right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{\sqrt[5]{x} + 7}{6} \right)^2$$

6) $f(x) = 2x^2 - 20x + 48$

Solución:

$$y = 2x^2 - 20x + 48$$

$$x = 2y^2 - 20y + 48$$

se suma y se resta 2 para completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$x = 2y^2 - 20y + 48 + 2 - 2$$

$$x = 2y^2 - 20y + 50 - 2$$

se factoriza 2:

$$x = 2\left(y^2 - 10y + 25\right) - 2$$

se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$x = 2(y + 5)^2 - 2$$

$$x + 2 = 2(y + 5)^2$$

$$(y + 5)^2 = \frac{x + 2}{2}$$

$$y + 5 = \sqrt{\frac{x + 2}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{x + 2}{2}} - 5$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{2}} - 5$$

I.9 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

La gráfica de una función contiene todos los puntos que representan parejas ordenadas de la forma (x, y) en el plano cartesiano tales que satisfacen la ecuación[3].

[3] Como en una función f, cada número x en el dominio tiene una y solo una imagen, no todo grupo de puntos en el plano cartesiano representa la gráfica de una función. Por tanto, la gráfica de una función f no puede contener dos puntos con la misma abscisa x y diferentes ordenadas y. Para fines prácticos, para saber si una gráfica representa a una función basta con trazar líneas verticales, y si las intersecta en un solo punto, es función.

Para trazar la gráfica de una función, normalmente se despeja la variable dependiente y posteriormente se determina su dominio. Después, se eligen convenientemente los valores de x para tabular y obtener así suficientes valores de y. Una vez obtenido esto, se ubican los puntos en el plano y se unen. Es recomendable utilizar las escalas apropiadas en los ejes coordenados para mostrar mejor su comportamiento.

Ejemplos.
Graficar las siguientes funciones estableciendo su dominio.

1) $y=\frac{1}{2x-8}$

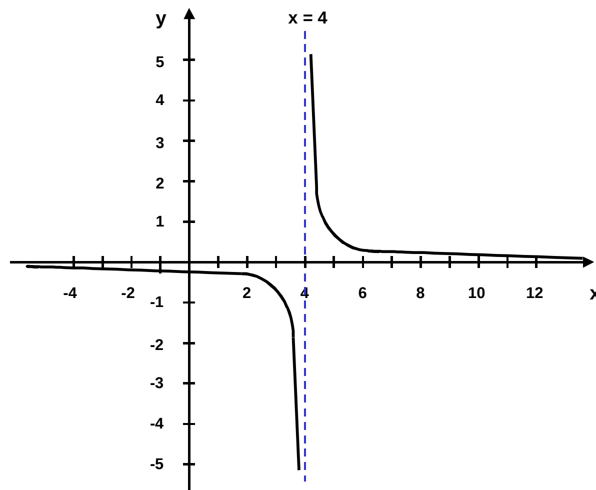
Solución:

Si el símbolo $\exists$ significa *existe* y el símbolo $\forall$ significa *para toda*, entonces: $\exists\, y\ \forall x$ excepto en $x=4$

$D_f=(-\infty,\,4)\cup(4,\,\infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	3.8	3.9
y	-0.071	-0.083	-0.100	-0.125	-0.167	-0.250	-0.500	-2.5	-5

x	4	4.1	4.2	5	6	7	8	9	10
y	no definido	5	2.5	0.500	0.250	0.167	0.125	0.100	0.083



2) $y=\frac{1}{4-x^2}$

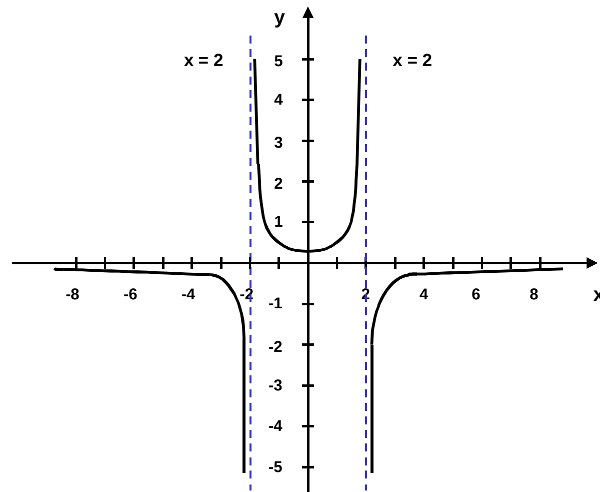
Solución:

$\exists\, y\ \forall x$ excepto en $x=2$ y $x=-2$

$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,\,2)\cup(2,\,\infty)$

x	-5	-4	-3	-2.1	-2	-1.9	-1
y	-0.047	-0.083	-0.200	-2.439	no definido	2.564	0.333

x	0	1	1.9	2	2.1	3	4	5
y	0.250	0.333	2.564	no definido	-2.439	-0.200	-0.083	-0.047



3) $y = -\frac{9}{x^2}$

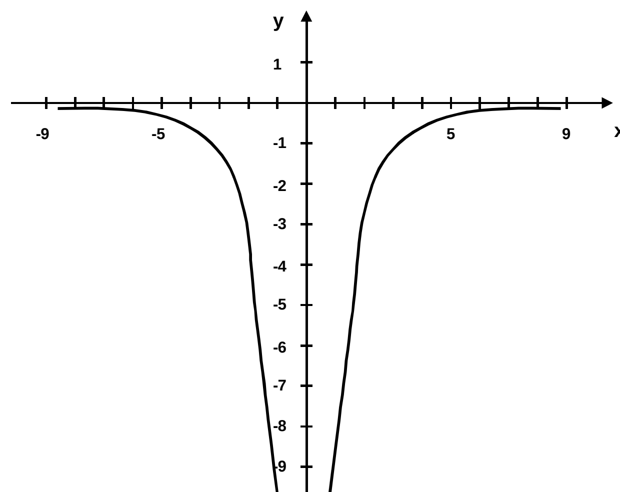
Solución:

$\exists\, y\, \forall x$ excepto en $x = 0$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	-0.140	-0.183	-0.250	-0.360	-0.562	-1	-2.250	-9	no definido

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-9	-2.250	-1	-0.562	-0.360	-0.250	-0.183	-0.140



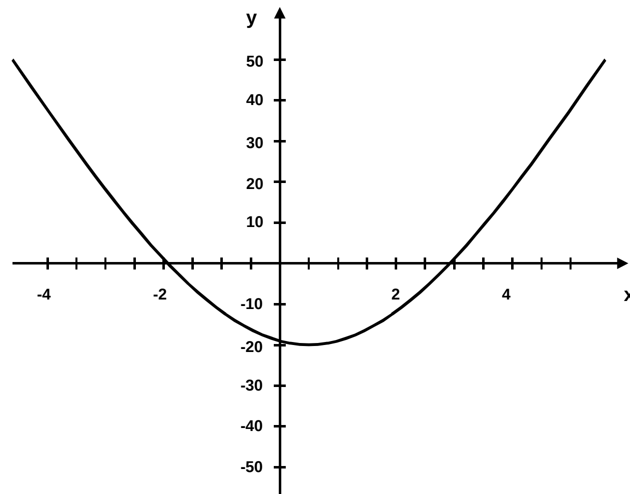
4) $y = 3x^2 - 3x - 18$

Solución:

$\exists\ y\ \forall x$

$D_f = (-\infty, \infty)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	42	18	0	-12	-18	-18	-12	0	18	42



5) $y = -\sqrt{5x-10}$

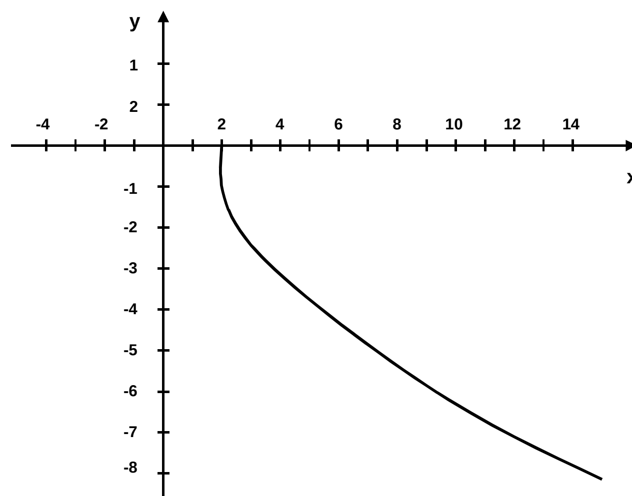
Solución:

Resolviendo la desigualdad: $5x-10 \geq 0$, se tiene que:

$\exists\ y\ \forall x$ con $x \geq 2$

$D_f = [2, \infty)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	no definido	0	-2.236	-3.162	-3.872	-4.472	-5	-5.477	-5.916	-6.324	-6.708	-7.071	-7.416



6) $y=\sqrt{\frac{36-4x^2}{9}}$

Solución:

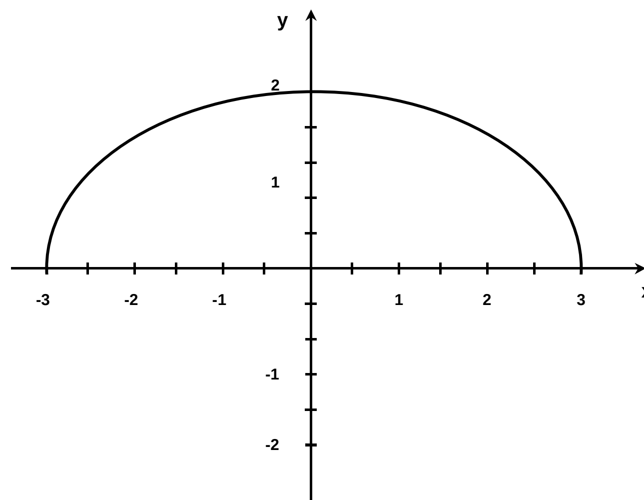
Resolviendo la desigualdad: $\frac{36-4x^2}{9}\geq 0$, se tiene que:

$36-4x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 < 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 9$

$\exists\, y\ \forall x$ con $-3\leq x\leq 3$

$D_f = [-3, 3]$

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0	1.105	1.490	1.732	1.885	1.972	2	1.972	1.885	1.732	1.490	1.105	0



I.10 FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS

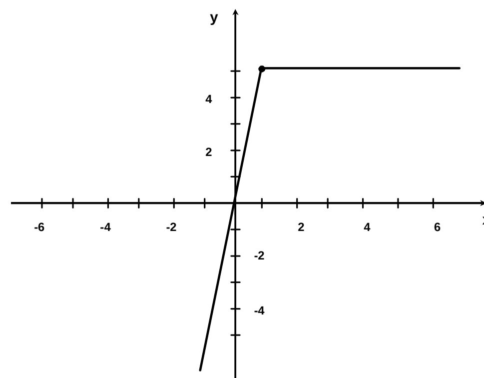
Una función $f(x)$ puede estar definida por intervalos de forma tal que tiene un comportamiento distinto en cada sección, por lo que se pueden presentar cambios bruscos en su desarrollo. Su dominio está dado por la unión de sus intervalos.

Ejemplos.
Explicar el comportamiento de las siguientes funciones y establecer su dominio.

1) $f(x)=\begin{cases} 5x & x\leq 1 \\ 5 & x>1 \end{cases}$

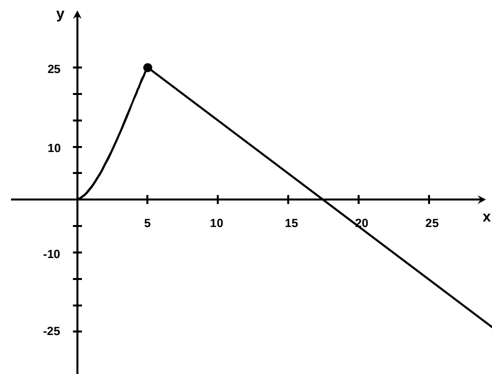
Solución.
La función es lineal hasta 1 y es constante en 5 desde un valor mayor de 1.

$D_f = (-\infty, \infty)$



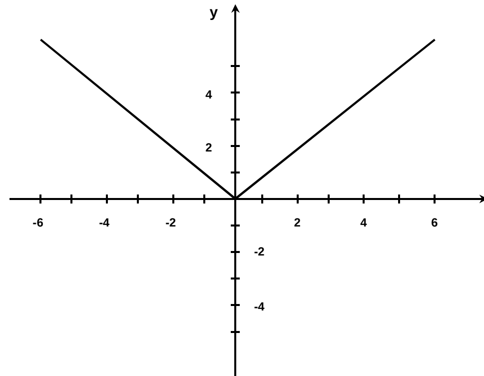
2) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 5 \\ 35-2x & x>5 \end{cases}$

Solución.
La función es cuadrática desde cero hasta 5 y se convierte en una recta de pendiente negativa a partir de un valor mayor a 5.
$D_f = [0, \infty)$



3) $f(x)=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x \ge 0 \end{cases}$

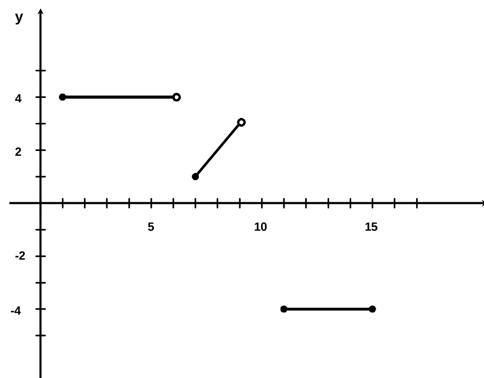
Solución.
Si x vale cero, la función es cero. Si x es positiva, la función toma su valor idéntico. Si x es negativa, la función toma su inverso aditivo. Por lo tanto, representa a la función $f(x)=|x|$.
$D_f = (-\infty, \infty)$



4) $f(x)=\begin{cases} 4 & 1\le x<6 \\ x-6 & 7\le x<9 \\ -4 & 11\le x\le 15 \end{cases}$

Solución.
La función es constante en 4 desde 1 hasta antes de 6, a partir de 7 y hasta antes de nueve es igual a la función identidad. Finalmente, la función es constante en –4 a partir de 11 y hasta 15.

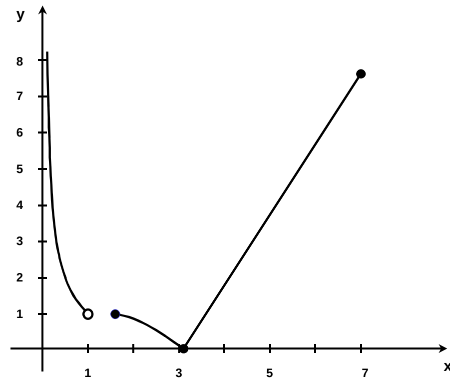
$D_f = [1, 6)\cup[7, 9)\cup[11, 15]$

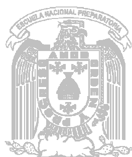


5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<1 \\ sen\,x & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi \\ -2\pi+2x & \pi<x\le 7 \end{cases}$

Solución.
La función es de proporcionalidad inversa si es mayor de cero y menor de 1, es igual al seno desde $\frac{\pi}{2}$ y hasta π. Finalmente, la función es lineal después de π y hasta 7.

$D_f = (0, 1)\cup\left[\frac{\pi}{2}, 7\right]$


y
8
7
6
5
4
3
2
1
1
3
5
7
x



LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

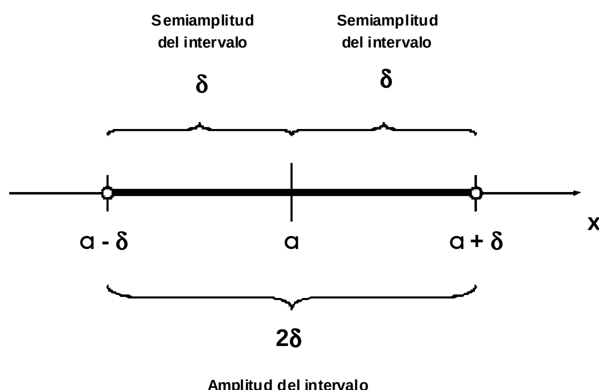
UNIDAD II

II.1 ENTORNOS

Se denomina *entorno* de un punto a en x, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ donde δ es la semiamplitud del intervalo.

El entorno de a, en notación de conjuntos puede escribirse como: $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$, o bien como un valor absoluto: $|x-a| < \delta$.

Gráficamente se representa así:



Ejemplo.
Obtener el entorno del punto $a=5$ y con la semiamplitud $\delta = 0.6$.

Solución.
Entorno de $a = (5-0.6, 5+0.6) = (4.4, 5.6)$

$= \{x \mid \quad 4.4 < x < 5.6\}$

$= |x-5| < 0.6$

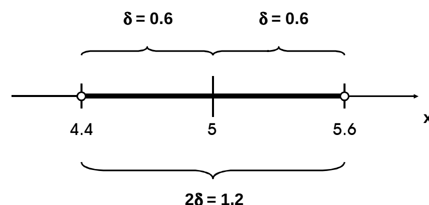
esto significa que el entorno de a son todos los valores de x desde 4.4 hasta 5.6, pero sin incluir a los extremos. Verificando algunos valores dentro del entorno:

si $x = 4.7$:

$|4.7-5| = |-0.3| = 0.3 < 0.6$

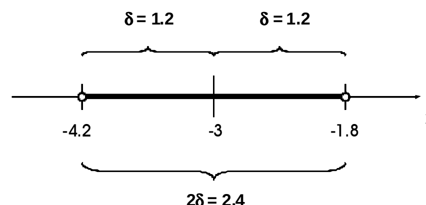
si $x = 5.42$:

$|5.42-5| = 0.42 < 0.6$



Ejemplo.
Obtener el entorno del punto $a = -3$ y con la semiamplitud $\delta = 1.2$.

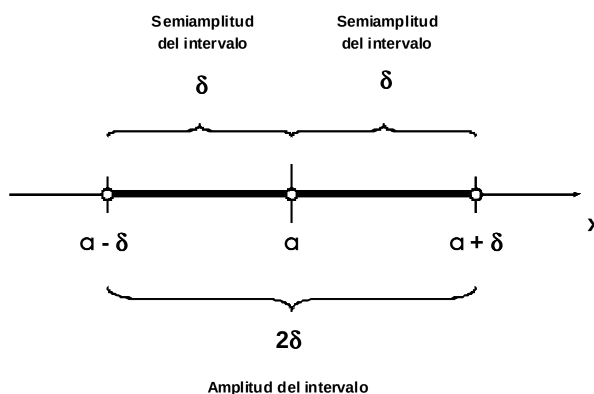
Solución.
Entorno de $a = (-3-1.2, -3+1.2) = (-4.2, -1.8)$
$= \{x \mid \quad -4.2 < x < -1.8\}$
$= |x+3| < 1.2$
esto significa que el entorno de a son todos los valores de x desde -4.2 hasta -1.8, pero sin incluir a los extremos:
si $x = -3.8$:
$|-3.8+3| = |-0.8| = 0.8 < 1.2$
si $x = -2$:
$|-2+3| = 1 < 1.2$



Se define como *entorno reducido* de un punto a en x al entono que excluye al propio punto a. Es decir, es el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ donde $x \neq a$.

El entorno reducido de a también puede escribirse como: $\{x \mid \quad a-\delta < x < a+\delta, \quad x \neq a\}$, o bien como: $0 < |x-a| < \delta$.

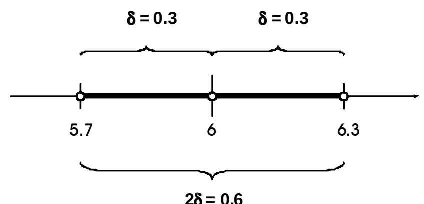
Gráficamente esto es:



Ejemplo.
Obtener el entorno reducido del punto $a = 6$ y con la semiamplitud $\delta = 0.3$

Solución.
Entorno reducido de $a = (6-0.3, 6+0.3) = (5.7, 6.3)$ si $x \neq 6$
$= \{x \mid \quad 5.7 < x < 6.3, \quad x \neq 6\}$
$= 0 < |x-6| < 0.3$

esto significa que el entorno reducido de a son todos los valores de x desde 5.7 hasta 6.3, quitando el 6 y sin incluir a los extremos:



si $x = 6.15$:

$$\left|6.15 - 6\right| = 0.15 < 0.3$$

si $x = 5.93$:

$$\left|5.93 - 6\right| = \left|-0.07\right| = 0.07 < 0.3$$

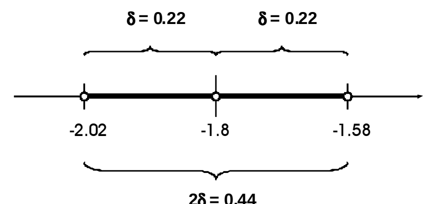
Ejemplo.
Obtener el entorno reducido del punto $a = -1.8$ y con la semiamplitud $\delta = 0.22$.

Solución.
Entorno reducido de $a = \left(-1.8 - 0.22, -1.8 + 0.22\right) = \left(-2.02, -1.58\right)$

$$= \left\{x \mid \quad -2.02 < x < -1.58, \quad x \neq -1.8\right\}$$

$$= 0 < \left|x + 1.8\right| < 0.22$$

esto significa que el entorno reducido de a son todos los valores de x desde -2.02 hasta -1.58, quitando el -1.8 y sin incluir a los extremos:



si $x = -1.63$:

$$\left|-1.63 + 1.8\right| = 0.17 < 0.22$$

si $x = -2.01$:

$$\left|-2.01 + 1.8\right| = \left|-0.21\right| = 0.21 < 0.22$$

II.2 DEFINICIÓN DE LÍMITE

Si se desea investigar el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 + 1$ para valores cercanos a 3 tanto menores como mayores a este valor. En la tabla siguiente se muestran los valores de $f(x)$ para valores aproximados pero no iguales a 3:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	7.25	3.5	13.25
2.6	7.76	3.4	12.56
2.7	8.29	3.3	11.89
2.8	8.84	3.2	11.24
2.9	9.41	3.1	10.61
2.95	9.7025	3.05	10.3025
2.99	9.9401	3.01	10.0601
2.999	9.994001	3.001	10.006001
2.9999	9.99940001	3.0001	10.00060001

A partir de la tabla, se demuestra que cuando x está cada vez más cerca de 3 por cualquiera de los dos lados, $f(x)$ se aproxima a 10. Este hecho se expresa al decir que "el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$ cuando x tiende a 3 es igual a 10". La notación para esta expresión es $\lim_{x \to 3}\left(x^2 + 1\right) = 10$.

Como se puede apreciar del ejemplo anterior, el interés se centra en conocer el valor de la función $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor a, pero sin ubicarse en dicho valor. Esto es, si x se acerca más y más a a (pero x no es igual a a), la función $f(x)$ se acerca más y más a un valor L. Esto significa que $f(x)$ *tiende a* L *si* x *tiende a* a.

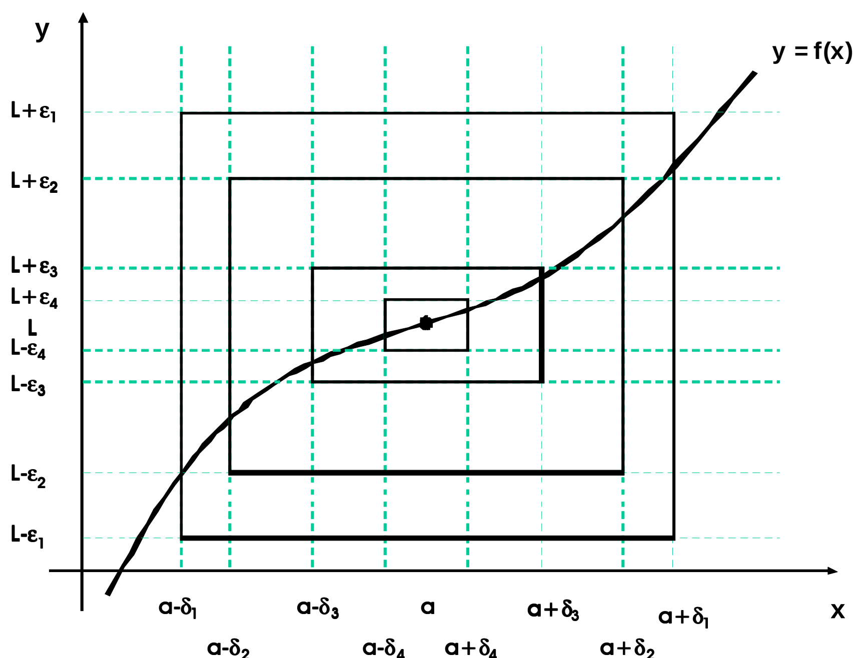
La frase "x tiende a a" significa que independientemente de lo próximo que esté x del valor a, existe siempre otro valor de x (distinto de a) en el dominio de f que está aún más próximo a a.

Definición de límite:

Una función f tiende hacia el límite L en a si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Se puede deducir de la definición, que para que exista el límite L de una función $f(x)$ es necesario que se forme un entorno de L en $f(x)$ siempre y cuando se pueda generar un entorno reducido de a en x.

Dado que el entorno de L es: $\{y \mid L - \varepsilon < y < L + \varepsilon\}$, el entorno reducido de a es: $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a\}$, donde δ y ε pueden se tan pequeñas como se desee, por lo que se pueden generar una infinidad de entornos cada vez más pequeños, siempre que $x \neq a$. Esto puede interpretarse como la formación de rectángulos cada vez más pequeños que incluyan al punto (a, L). Gráficamente esto es:



Nótese como cada entorno $L - \varepsilon_i < y < L + \varepsilon_i$ se forma respondiendo a los entornos $a - \delta_i < x < a + \delta_i$, y a medida que δ tiende a cero (sin llegar a serlo), también ε tiende a cero.

En caso de existir, el límite se representa en forma simbólica como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se lee: "*el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tienda hacia* a *es* L".

Una función no puede tender a dos límites distintos a la vez. Esto es, si el límite de una función existe, es único:

El límite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe si el límite por la izquierda,

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

y el límite por la derecha,

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

son iguales.

Estos dos últimos límites se conocen como *límites laterales*, lo que significa que se pueden aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como se quiera, ya sea por la derecha o por la izquierda. De lo anterior, se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Para fines prácticos, para determinar si una función $f(x)$ tiene límite cuando $x \to a$ basta con aplicar la definición y establecer una expresión que relacione a δ y ε. En caso de no encontrar una relación, la función no tendrá límite en ese punto.

Ejemplos.
A través de la definición, calcular formalmente los siguientes límites:

1) $\lim_{x \to 2} (4x + 5)$

Solución:

$\lim_{x \to 2} (4x + 5) = 4(2) + 5 = 8 + 5 = 13$

aplicando la definición:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - a| < \delta$$

$$|4x + 5 - 13| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$|4x - 8| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$|4(x - 2)| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

$\therefore$ el límite existe y es 13.

2) $\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x-6\right)$

Solución:

$\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x-6\right)=3^2-2(3)-6=9-6-6=-3$

aplicando la definición:

$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-a|<\delta$

$\left|x^2-2x-6-(-3)\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-3|<\delta$

$\left|x^2-2x-3\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-3|<\delta$

$|(x+1)(x-3)|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-3|<\delta$

$|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{x+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-2|<\delta$

$\delta=\dfrac{\varepsilon}{x+1}$

$\therefore$ el límite existe y es -3.

3) $\lim_{x\to 4}\left(x^3+x^2-x-1\right)$

Solución:

$\lim_{x\to 4}\left(x^3+x^2-x-1\right)=4^3+4^2-4-1=64+16-4-1=75$

aplicando la definición:

$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-a|<\delta$

$\left|x^3+x^2-x-1-75\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-4|<\delta$

$\left|x^3+x^2-x-76\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-4|<\delta$

$\left|(x-4)\left(x^2+5x+19\right)\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-4|<\delta$

$|x-4|<\dfrac{\varepsilon}{x^2+5x+19} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-4|<\delta$

$\delta=\dfrac{\varepsilon}{x^2+5x+19}$

$\therefore$ el límite existe y es 75.

4) $\lim_{x\to -5}\left(-\dfrac{2}{x}\right)$

Solución:

$\lim_{x\to -5}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{2}{5}$

aplicando la definición:

$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-a|<\delta$

$$\left|-\frac{2}{x}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-(-5)\right|<\delta$$

$$\left|\frac{-10-2x}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x+5\right|<\delta$$

$$\left|\frac{-2(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x+5\right|<\delta$$

aplicando el valor absoluto a los términos del producto:

$$2\left|\frac{(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x+5\right|<\delta$$

$$\left|x+5\right|<\frac{5x\varepsilon}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-5\right|<\delta$$

$$\delta=\frac{5x\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ el límite existe y es $\frac{2}{5}$.

5) $\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}=\sqrt{2(1)}=\sqrt{2}$$

aplicando la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-a\right|<\delta$$

$$\left|\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-1\right|<\delta$$

multiplicando por el conjugado del binomio:

$$\left|\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-1\right|<\delta$$

$$\left|\frac{2x-2}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-1\right|<\delta$$

$$\left|\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-1\right|<\delta$$

$$\left|x-1\right|<\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|x-1\right|<\delta$$

$$\delta=\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ el límite existe y es $\sqrt{2}$.

6) $\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{-3+3}=\frac{1}{0}\quad (No\ existe)$$

si se desea aplicar la definición:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-a|<\delta$$

no se puede ya que L no es un valor definido, por lo tanto, el límite no existe.

II.3 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ dos límites que existen y c una constante. Entonces:

1. $\lim_{x\to a}[c]=c$

El límite de una constante es la misma constante.

2. $\lim_{x\to a}[x]=a$

El límite de la función identidad es igual al valor de a.

3. $\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim_{x\to a} f(x)$

El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función.

4. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$

El límite de una suma algebraica es la suma algebraica de los límites.

5. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

El límite de un producto es el producto de los límites.

6. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\qquad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

El límite de un cociente es el cociente de los límites.

7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n\qquad n\in N$

El límite de la potencia de una función es el límite de la función elevada a la potencia.

8. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}\qquad n\in N$ (si n es par se asume que $\lim_{x\to a} f(x)>0$)

El límite de una raíz es la raíz del límite.

Ejemplos.
Aplicando las propiedades, calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 4} 5=5$

2) $\lim_{x\to -7} x=-7$

3) $\lim_{x\to 2} 6x^2 = 6(2)^2 = 6(4) = 24$

4) $\lim_{x\to 3} 3x^2 - 5x + 9 = 3(3)^2 - 5(3) + 9 = 3(9) - 5(3) + 9 = 27 - 15 + 9 = 21$

5) $\lim_{x\to -1} 5x^3 - 8x^2 + 10x - 15 = 5(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10(-1) - 15 = 5(-1) - 8(1) + 10(-1) - 15$

$$= -5 - 8 - 10 - 15 = -38$$

6) $\lim_{x\to 5} \frac{1}{4x-6} = \frac{1}{4(5)-6} = \frac{1}{20-6} = \frac{1}{14}$

7) $\lim_{x\to -4} \frac{2x}{6x-10} = \frac{2(-4)}{6(-4)-10} = \frac{-8}{-24-10} = \frac{-8}{-34} = \frac{4}{17}$

8) $\lim_{x\to 2} (2x)^3 = (2(2))^3 = 4^3 = 64$

9) $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8(8)} = \sqrt[3]{64} = 4$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

11) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

12) $\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6} = \frac{2(2)-4}{2^2+2-6} = \frac{4-4}{4+2-6} = \frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

13) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \frac{4^2-16}{4^2-6(4)+8} = \frac{16-16}{16-24+8} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x-2} = \frac{4+2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

14) $\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+3x+2} = \frac{((-1)^2-1)(-1+2)}{(-1)^2+3(-1)+2} = \frac{(1-1)(-1+2)}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2$$

15) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{1^2-1}{1^2-3(1)+2} = \frac{1-1}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-2}=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

16) $\lim_{x\to4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\frac{4^2+4-20}{4^2-4-12}=\frac{16+4-20}{16-4-12}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\lim_{x\to4}\frac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{x+5}{x+3}=\frac{4+5}{4+3}=\frac{9}{7}$$

17) $\lim_{x\to6}\frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\frac{6^2-11(6)+30}{6^2-13(6)+42}=\frac{36-66+30}{36-78+42}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to6}\frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\lim_{x\to6}\frac{(x-6)(x-5)}{(x-6)(x-7)}=\lim_{x\to6}\frac{x-5}{x-7}=\frac{6-5}{6-7}=\frac{1}{-1}=-1$$

18) $\lim_{x\to7}\frac{x^2-14x+49}{x-7}=\frac{7^2-14(7)+49}{7-7}=\frac{49-98+49}{7-7}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to7}\frac{x^2-14x+49}{x-7}=\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to7}(x-7)=7-7=0$$

19) $\lim_{x\to5}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{x+5}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to5}\frac{1}{x-5}=\frac{1}{5-5}=\frac{1}{0}\quad(\text{no existe})$

20) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2^2-4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4-4}=\frac{0}{0}$

multiplicando por el binomio conjugado del numerador para deshacer la indeterminación:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x^2-4)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{(2+2)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{4(2\sqrt{2})}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

21) $\lim_{x\to8}\frac{x+8}{-2x+16}=\frac{8+8}{-2(8)+16}=\frac{8+8}{-16+16}=\frac{16}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to8}\frac{x+8}{-2x+16}=\lim_{x\to8}\frac{x+8}{-2(x-8)}$$

como no se puede simplificar, el límite no existe.

22) $\lim_{x\to5}\frac{x^3-125}{x^2-25}=\frac{5^3-125}{5^2-25}=\frac{125-125}{25-25}=\frac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+5x+25}{x+5}=\frac{5^2+5(5)+25}{5+5}$$

$$=\frac{25+25+25}{10}=\frac{75}{10}=\frac{15}{2}$$

23) $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\frac{7-7}{\sqrt{7-7}}=\frac{0}{\sqrt{0}}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación, se eleva al cuadrado:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{\left(\sqrt{x-7}\right)^2}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{x-7}$$

factorizando el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x-7)=7-7=0$$

24) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\frac{\sqrt{6-6}}{6-6}=\frac{\sqrt{0}}{0}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, elevando al cuadrado:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-6}\right)^2}{(x-6)^2}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)^2}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6}=\frac{1}{6-6}=\frac{1}{0}\quad (no\ existe)$$

25) $\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\frac{\sqrt{10-1}-3}{10-10}=\frac{\sqrt{9}-3}{10-10}=\frac{3-3}{10-10}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se multiplica por el binomio conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}\left(\frac{\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}+3}\right)=\lim_{x\to 10}\frac{x-1-9}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{10-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

II.4 LÍMITES INFINITOS

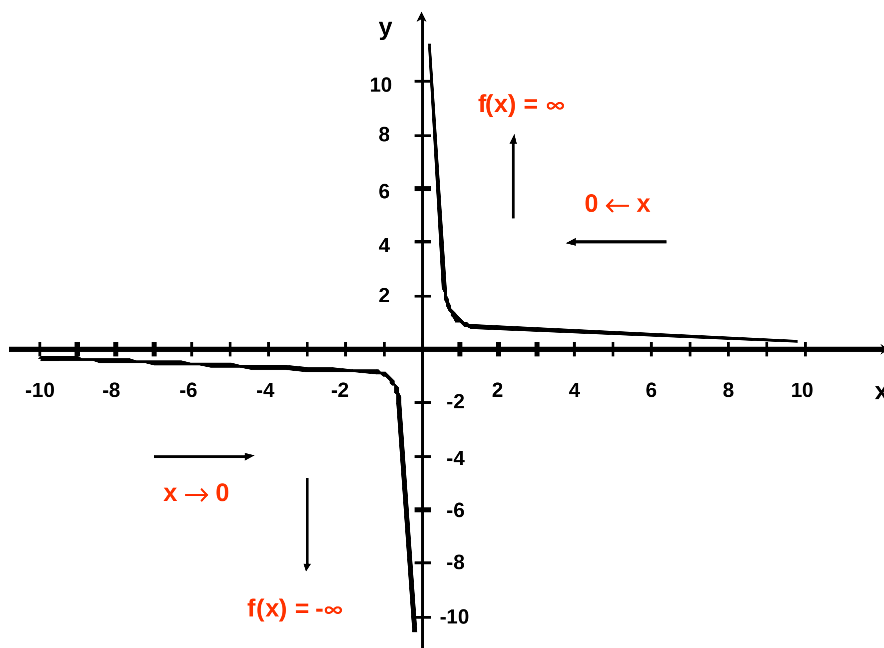
Los tipos de límites en los que una función $f(x)$ se hace infinita (ya sea positiva o negativa) cuando x tiende a a por la izquierda o por la derecha se conocen como *límites infinitos*.

¿Qué ocurre cuando x se aproxima o tiende a cero en la función $f(x)=\frac{1}{x}$?

Tabulando la función se aprecia que cuando x tiende a cero por la derecha, los valores de la función que son positivos, son cada vez más grandes. Es decir, los valores de la función aumentan. Mientras que, cuando x tiende a cero por la izquierda, los valores de la función son negativos, son cada vez más pequeños. Es decir, los valores de la función disminuyen.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10	0.1	-10	-0.1
5	0.2	-5	-0.2
4	0.25	-4	-0.25
3	0.333	-3	-0.333
2	0.5	-2	-0.5
1	1	-1	-1
0.5	2	-0.5	-2
0.2	5	-0.2	-5
0.1	10	-0.1	-10
0.01	100	-0.01	-100
0.001	1000	-0.001	-1000

Gráficamente en ambos casos, $f(x)$ crece o decrece sin tope, sin fronteras. Esto es,



El símbolo de infinito (∞) no significa que el límite exista, ya que no representa un número real. Simboliza el comportamiento no acotado (sin fronteras) de $f(x)$ cuando x tiende a a. De manera que, al decir que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito" se interpreta que el límite *no existe*.

En general, considérese la función:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

las raíces del polinomio $q(x)$, provocan que la función no esté definida, es decir, sus límites son el infinito. Geométricamente, cada raíz representa a una *asíntota vertical*.

Ejemplos.

1) En la función $f(x)=\frac{1}{x-3}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$$

el valor que anula al denominador es 3, así que el límite en el infinito se presenta en la asíntota $x=3$.

2) En la función $f(x)=\frac{7x}{x^2-25}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{7}{x^2-25}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 5^-}\frac{7}{x^2-25}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -5^+}\frac{7}{x^2-25}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to -5^-}\frac{7}{x^2-25}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son 5 y -5, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=5$ y $x=-5$.

3) En la función $f(x)=\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 4^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -7^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to -7^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son 0, 4 y -7 respectivamente, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=0$, $x=4$ y $x=-7$.

II.5 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los límites trigonométricos elementales son aquellos que se obtienen directamente, ya que basta sólo con evaluarlos y recordar los valores notables de dichas funciones.

Ejemplos.
Evaluar los siguientes límites trigonométricos elementales:

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} sen\,x = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.5$

2) $\lim_{x\to 0} 3\cos x = 3\cos(0)=3(1)=3$

3) $\lim_{x\to\pi}\tan x=\tan(\pi)=\infty$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cot^2 x=\cot^2\frac{\pi}{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sec x}=\frac{4(0)}{\sec(0)}=\frac{4(0)}{1}=\frac{0}{1}=0$

6) $\lim_{x\to 2\pi}\csc x=\csc(2\pi)=\infty$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{12}{2\cos 4x}=\frac{12}{2\cos 4(0)}=\frac{12}{2\cos(0)}=\frac{12}{2(1)}=\frac{12}{2}=6$

Existen otros límites cuya evaluación no es tan simple. En este sentido, el límite de la función $\frac{sen\,x}{x}$ cuando x tiende a cero es muy importante ya que la resolución de muchos límites trigonométricos se basan en su aplicación.

Por ello, se evalúa en primera instancia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

aparentemente, el límite no existe. Sin embargo, si se tabula la función (x en radianes), se tiene:

x	$\frac{sen\,x}{x}$
± 1	0.841470
± 0.5	0.958851
± 0.4	0.973545
± 0.3	0.985067
± 0.2	0.993346
± 0.1	0.998334
± 0.01	0.999983
± 0.001	0.999999

Como puede apreciarse el límite tiende a la unidad[1]. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$$

Ejemplos.
Considerando el resultado anterior y aplicando identidades trigonométricas, obtener los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\frac{3sen\,2(0)}{5(0)}=\frac{3sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)(3)sen\,2x}{5(2x)}=\frac{6}{5}(1)=\frac{6}{5}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2x}{x}=\frac{4sen^2(0)}{0}=\frac{4(0)^2}{0}=\frac{0}{0}$

expresando la potencia como producto:

[1] La demostración formal de este límite puede consultarse en la página 232 del libro *Cálculo Diferencial e Integral*, de J. Stewart incluido en la bibliografía.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4sen\,xsen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}4sen\,x\frac{sen\,x}{x}=4(sen\,0)(1)=4(0)(1)=0$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\frac{5(0)}{sen\,(5(0))}=\frac{0}{sen\,(0)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sen\,5x}{5x}}=\frac{1}{1}=1$$

En general, $\lim_{u\to 0}\frac{u}{sen\,u}=1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\;4x}=\frac{sen\,8(0)}{sen\;(4(0))}=\frac{sen\;(0)}{sen\;(0)}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por $8x$ y 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8xsen\,8x}{8xsen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x(1)}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8(4x)}{4sen\,4x}=\frac{8}{4}(1)=2$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos(0)}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{sen\,x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x\tan\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}(1)\tan\frac{x}{2}=(1)\tan\frac{0}{2}=1\tan(0)=(1)(0)=0$$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\frac{sen^3(2(0))}{(0)sen^2(3(0))}=\frac{(0)^3}{0(0)^2}=\frac{0}{0}$

expresando las potencias como productos y multiplicando y dividiendo por 2 y $(2x)(2x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)sen\,2xsen^2 2x}{(2x)sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1)sen^2 2x}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)sen\,2xsen\,2x}{(2x)(2x)sen^2 3x}$$

multiplicando y dividiendo por 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)(1)}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2)(2)(3x)(3x)}{(3)(3)sen\,3xsen\,3x}=\frac{8}{9}(1)(1)=\frac{8}{9}$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\frac{\cos(0)-1}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $sen^2 x+\cos^2 x=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2 x}{x^2}=\frac{-sen\,xsen\,x}{x(x)}=-(1)(1)=-1$$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{7x}=\frac{\tan(0)}{7(0)}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan x=\frac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{7x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7\cos x}=\frac{1}{7\cos(0)}=\frac{1}{7(1)}=\frac{1}{7}$$

9) $\lim_{x\to 0} x\csc 6x$

aplicando la identidad trigonométrica $\csc x=\frac{1}{sen\,x}$ y multiplicando y dividiendo por 6:

$$\lim_{x\to 0} x\csc 6x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,6x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{6sen\,6x}=\frac{1}{6}(1)=\frac{1}{6}$$

10) $\lim_{x\to \pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\frac{\tan(\pi)}{\pi-\pi}=\frac{0}{0}$

aplicando las identidades trigonométricas $\tan x=\tan(x-\pi)$ y $\tan x=\frac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{\tan(x-\pi)}{(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{sen(x-\pi)}{(x-\pi)\cos(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{\cos(x-\pi)}=\frac{1}{\cos(\pi-\pi)}=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1$$

II.6 LÍMITES QUE TIENDEN A INFINITO

Dada una función f definida en un intervalo (a,∞). Entonces el

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como se quiera, si se elige una x suficientemente grande. Esta expresión se lee como “el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es L”.

Similarmente, la expresión $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como se quiera, si se elige una x negativa suficientemente grande y se lee como “el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es L”.

Para saber si existe el límite de una función cuando x tiende a infinito es necesario analizar su comportamiento particular. Por su importancia, los límites de este tipo que revisten más interés de estudio son los de las funciones algebraicas y de las racionales.

En el primer caso, todos los límites de funciones algebraicas que tienden a infinito (o a menos infinito) no existen.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-5x)=(\infty)^2-5(\infty)=\infty-\infty=\infty$

2) $\lim_{x\to\infty}(4x^2+3x-6)=4(\infty)^2+3(\infty)-6=\infty+\infty-6=\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}(-7x^3-3x^2+2x-6)=-7(-\infty)^3-3(-\infty)^2+2(-\infty)+8=\infty-\infty-\infty+8=\infty$

En el segundo caso, para calcular límites de funciones racionales, normalmente el procedimiento consiste en dividir cada término de la función por el término en x que posee el mayor exponente, se reduce aplicando leyes de exponentes y se toma el límite, considerando que: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\frac{9(\infty)-6}{5(\infty)^2-2(\infty)+7}=\frac{\infty-6}{\infty-\infty+7}=\frac{\infty}{\infty}$$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre x^2 se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}-\frac{6}{x^2}}{5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{0-0}{5-0+0}=\frac{0}{5}=0$$

2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\frac{18(-\infty)^3+7(-\infty)+1}{2(-\infty)^2-6(-\infty)^3-4}=\frac{-\infty-\infty+1}{\infty+\infty-4}=\frac{\infty}{\infty}$$

Es una indeterminación, pero si se divide todo entre x^3 se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{18x^3}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{6x^3}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{18+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x}-6-\frac{4}{x^3}}=\frac{18+0-0}{0-6-0}=\frac{18}{-6}=-3$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\frac{5(\infty)^4+2(\infty)^2-8(\infty)}{3(\infty)^2-2(\infty)+10}=\frac{\infty+\infty-\infty}{\infty-\infty+10}=\frac{\infty}{\infty}$$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre x^4 se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}-\frac{8x}{x^4}}{\frac{3x^2}{x^4}-\frac{2x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{10}{x^4}}=\frac{5+0-0}{0-0+0}=\frac{5}{0}\quad (\textit{no existe})$$

En general, para calcular límites que tienden a infinito (o a menos infinito), de las funciones racionales de la forma:

$$p(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_0}$$

existen tres casos posibles:

1) Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador y el límite de la función es cero.

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=0,\quad \text{si}\quad n<m$$

2) Si los grados de los polinomios en el numerador y el denominador son iguales, el límite es el cociente del coeficiente del exponente mayor del numerador entre el coeficiente del exponente mayor del denominador.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{si} \quad n = m$$

3) Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite no existe.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe), \quad \text{si} \quad n > m$$

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{19+5x+8x^2+13x^5}{14x^6+17x^4+8x^5+12x}$

Como $n < m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^5-18x+13x^2}{-11-15x^3+6x^4-2x^2}$

Como $n > m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-9x-12x^3}{4x-14-6x^3-2x^2}$

Como $n = m = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \dfrac{-12}{-6} = 2$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3-11x+x^5}{5+x^3+7x-12x^2}$

Como $n > m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe)$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+20x^4-2x^2}{7x^2-1-9x^3-4x^4}$

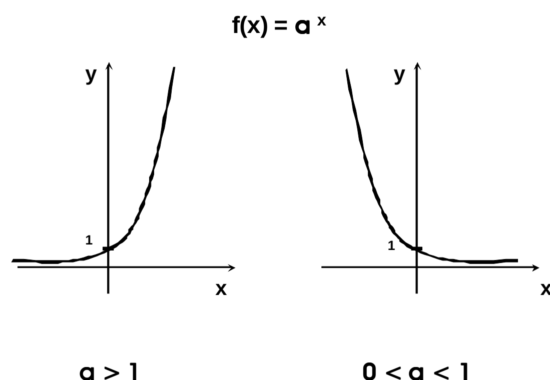
Como $n = m = 4$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \dfrac{20}{-4} = -5$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+5x^4-x^2+48}{11x^3+x^6+3-4x^2-10x}$

Como $n < m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = 0$

II.7 LÍMITES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Una *función exponencial* es una función de la forma: $f(x) = a^x$ donde a es un número real positivo y $a \neq 1$.
El comportamiento general de esta función se puede apreciar en las siguientes gráficas:



Sus características son:

- Dominio = (-∞, ∞)
- Rango = (0, ∞)
- La asíntota horizontal es el eje x
- Siempre corta al eje y en el punto $P(0,1)$
- Siempre es creciente si $a>1$ y siempre es decreciente si $0<a<1$
- La función crece más rápido si la base es más grande y decrece más rápido si la base es más pequeña.

De acuerdo a lo anterior, se puede inferir que:

1. $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad a>1$
2. $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad a>1$
3. $\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad 0<a<1$
4. $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty, \qquad 0<a<1$
5. $\lim_{x\to 0} a^x = 1$

Ejemplo.

Evaluar numéricamente el límite: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Solución.
Tabulando:

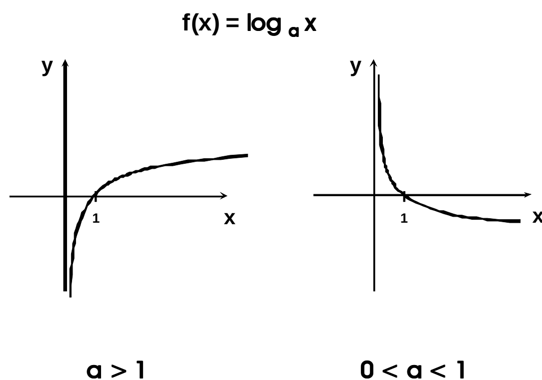
x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
3	1.587401
2	1.732050
1	2
0.5	2.25
0.1	2.593742
0.01	2.704813
0.001	2.716923
0.0001	2.718145
0.00001	2.718268

Como se puede advertir, el límite tiende a un número cercano a 2.71. Dicho límite es el número irracional conocido como e y tiene el valor aproximado de $e \approx 2.71828182846\cdots$.

Se llama *función logarítmica* a la función real de variable real :

$$y = \log_a f(x)$$

El comportamiento general de esta función se puede apreciar en las siguientes gráficas:



La función logarítmica es una aplicación biyectiva definida de **R**$^+$ en **R** y sus características son:

- Dominio = (0, ∞)
- Rango = (-∞, ∞)
- La asíntota vertical es el eje y
- Siempre corta al eje x en el punto $P(1,0)$
- Siempre es creciente si $a > 1$ y siempre es decreciente si $0 < a < 1$
- La función crece más rápido si la base es más pequeña (cuando $a > 1$) y decrece más rápido si la base es más grande (cuando $0 < a < 1$)
- La función logarítmica de base a es la recíproca de la función exponencial de base a

Por lo anterior, se puede inferir que:

1. $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty, \qquad a > 1$
2. $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty, \qquad a > 1$
3. $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty, \qquad 0 < a < 1$
4. $\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty, \qquad 0 < a < 1$

Ejemplo.

Evaluar numéricamente el límite: $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_{10} x}{x}$

Solución.

Tabulando:

x	$\frac{\log_{10} x}{x}$
5	0.139794
10	0.100000
50	0.033979
100	0.020000
1000	0.003000
10,000	0.000400
100,000	0.000050
1'000,000	0.000006

x es más grande que su logaritmo, así que a medida que x crece, la fracción va disminuyendo. Por lo tanto: $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{10} x}{x} = 0$

II.8 CONTINUIDAD

Una función es continua en $x = a$ cuando no hay interrupción en la gráfica de f en a. Su gráfica no aparece con huecos o saltos en f. Esto es, una función es continua si su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

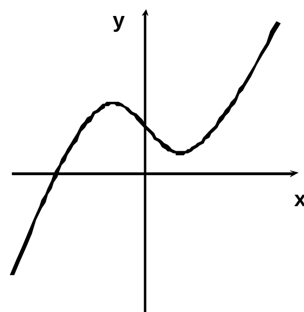
Formalmente, una función f es *continua* en un punto $x = a$ si está definida en ese punto, y además:

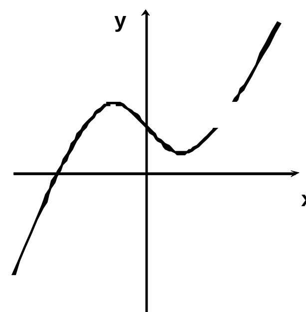
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

En caso de no cumplir con la condición se dice que la función es *discontinua*.

Una función f es *continua en un intervalo* cuando es continua en todos los puntos de ese intervalo.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$





Función continua **Función discontinua**

Ejemplos.

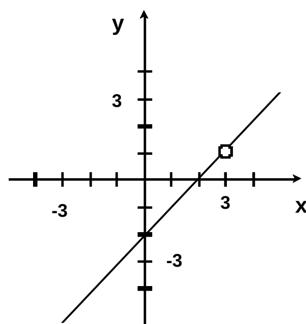
1) La función $f(x) = 3x^2 - 5$ es continua en el punto $x = 1$ porque $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3(1)^2 - 5 = 3 - 5 = -2$.

2) La función $f(x) = \sqrt{9sen\, x - 5}$ es continua en el punto $x = \pi$ porque $\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \sqrt{9sen(\pi) - 5} = \sqrt{9(1) - 5} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$.

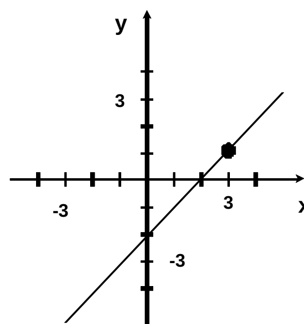
3) La función $f(x) = \frac{1}{x - 4}$ es discontinua porque en el punto $x = 4$ no está definida y porque el límite no existe.

4) La función $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ es discontinua porque en el punto $x = 3$ no está definida, aunque el límite exista: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1$.

Nótese como en este último ejemplo la función original puede reescribirse como: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$, la cual es continua. En estos casos la discontinuidad recibe el nombre de *evitable*. Las gráficas de ambas funciones es la misma a excepción de que en la primera tiene una especie de orificio en el punto $x = 3$ y en y la segunda no. Evitar la discontinuidad consiste en rellenar dicho orificio tal y como se ve en la siguiente figura:



Función discontinua en x = 3



Función continua en x = 3

Las discontinuidades se clasifican en: evitables y no evitables. Una discontinuidad en $x = a$ es evitable si f se puede redefinir en ese punto.

Los siguientes tipos de funciones son continuas <u>en sus dominios</u>:

- Polinomiales
- Racionales
- De raíz
- Trigonométricas
- Trigonométricas inversas
- Exponenciales
- Logarítmicas

Sean f y g dos funciones continuas en $x=a$, entonces las siguientes operaciones de funciones también son continuas en $x=a$:

$f+g$

$f-g$

$f \cdot g$

$\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

$c \cdot f$, siendo c una constante

$f \circ g(x) = f(g(x))$, si f es continua en $g(a)$.

Ejemplo.
Determinar si las siguientes funciones son continuas en el punto dado:

1) $f(x)=8x^3-3x^2-6x+7$ en el punto $x=2$
Solución:

$$f(2)=8(2)^3-3(2)^2-6(2)+7=8(8)-3(4)-12+7=64-12-12+7=47$$

$$\lim_{x\to 2}\left(8x^3-3x^2-6x+7\right)=8(2)^3-3(2)^2-6(2)+7=8(8)-3(4)-12+7=64-12-12+7=47$$

como $\lim_{x\to 2} f(x)= f(2)$, la función sí es continua en $x=2$ (lo cual era de esperarse ya que es una función polinomial).

2) $f(x)=\sqrt{2x-10}$ en el punto $x=3$
Solución:
$f(2)=\sqrt{2(3)-10}=\sqrt{6-10}=\sqrt{-4}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la inexistencia).

3) $f(x)=\frac{x^2-49}{x+7}$ en el punto $x=-7$
Solución:
El valor $x=-7$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x)=\frac{x^2-49}{x+7}=\frac{(x+7)(x-7)}{x+7}=x-7$$

$$f(7)=-7-7=-14$$

$$\lim_{x\to -7}\frac{x^2-49}{x+7}=\lim_{x\to -7}\frac{(x+7)(x-7)}{x+7}=\lim_{x\to -7}(x-7)=-7-7=-14$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x=-7$ pero es evitable.

4) $f(x)=\frac{x^2}{12+3x}$ en el punto $x=-4$

Solución:

$f(2)=\frac{(-4)^2}{12+3(-4)}=\frac{16}{0}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la discontinuidad).

5) $f(x)=\log_{10} x^2$ en el punto $x=10$

Solución:

$f(10)=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$

$\lim_{x\to 10}\log_{10} x^2=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$ como $\lim_{x\to 10} f(x)=f(10)$, la función sí es continua en $x=10$ (lo cual era de esperarse ya que es una función logarítmica).

6) $f(x)=\frac{8x^5-24x^4}{4x}$ en el punto $x=0$

Solución:

El valor $x=0$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x)=\frac{4x\left(2x^4-6x^3\right)}{4x}=2x^4-6x^3$$

$$f(0)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x^5-24x^4}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(2x^4-6x^3\right)}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(2x^4-6x^3\right)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x=0$ pero es evitable.

Ejemplos.

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\frac{5x-2}{3x-18}$

Solución.

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en el punto $x=6$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no es evitable.

2) $f(x)=\frac{10x^3+5}{9x-x^2}$

Solución.

$$f(x)=\frac{10x^3+5}{x(9-x)}$$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=0$ y $x=9$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no son evitables.

3) $f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-7x+10}$

Solución.

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-5)}{(x-2)(x-5)}=\frac{x+5}{x-2}$$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=2$ y $x=5$ (ya que ahí se anula el denominador). Sin embargo, en $x=5$ es evitable.

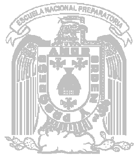
4) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ 24-2x & x>4 \end{cases}$

Solución.

$$f(4)=(4)^2=16$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4} x^2=(4)^2=16$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4}(24-2x)=24-2(4)=24-8=16$$

como $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)$ entonces el $\lim_{x\to 4} f(x)=16$

Por lo tanto, hay continuidad en el intervalo $[0,\infty)$.



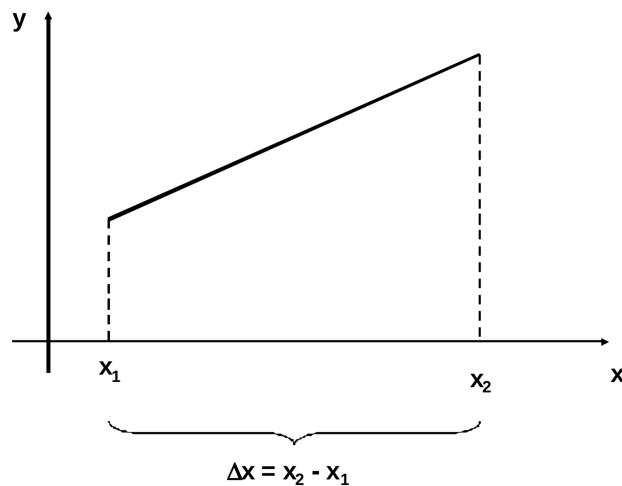
LA DERIVADA

UNIDAD III

III.1 INCREMENTOS

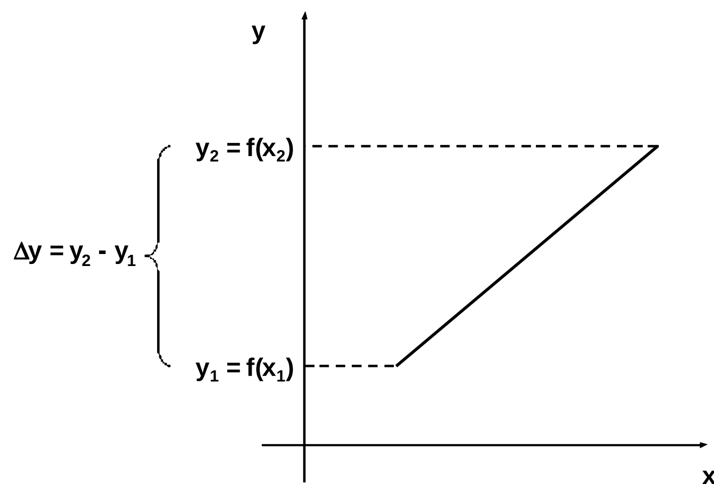
Se define como *incremento de la variable* x al aumento o disminución que experimenta, desde un valor x_1 a otro x_2, en su campo de variación. Se denota por Δx. Por tanto:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



De forma análoga, el *incremento de la variable* y es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor y_1 a otro y_2, en su campo de variación. Se denota por Δy, esto es:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$



Por definición, los incrementos pueden ser:
$\Delta > 0$ si el valor final es mayor que el inicial
$\Delta < 0$ si el valor final es menor que el inicial
$\Delta = 0$ si el valor final es igual que el inicial

Ejemplos.

1) Sea $y = 4x^2 - 3$, obtener Δx y Δy si x pasa de 2 a 2.5
Solución:
$x_1 = 2, \quad x_2 = 2.5$
$\Delta x = 2.5 - 2 = 0.5$
$y_1 = f(x_1) = f(2) = 4(2)^2 - 3 = 16 - 3 = 13$
$y_2 = f(x_2) = f(2.5) = 4(2.5)^2 - 3 = 25 - 3 = 22$
$\Delta y = y_2 - y_1$
$\Delta y = 22 - 13 = 9$

2) Sea $y = 6x^3 - 2x - 10$, obtener Δx y Δy si x pasa de 3 a 3.02
Solución:
$x_1 = 3, \quad x_2 = 3.02$
$\Delta x = 3.04 - 3 = 0.02$
$y_1 = f(x_1) = f(3) = 6(3)^3 - 2(3) - 10 = 162 - 6 - 10 = 146$
$y_2 = f(x_2) = f(3.02) = 6(3.02)^3 - 2(3.02) - 10 = 165.2616 - 6.04 - 10 = 149.2216$
$\Delta y = y_2 - y_1$
$\Delta y = 149.2216 - 146 = 3.2216$

Como puede observarse, y_2 es el valor final de la variable dependiente cuando a x se le asigna el valor x_2. De la misma forma, y_1 es el valor inicial de la variable dependiente cuando a x se le asigna el valor inicial x_1. Esto es:

$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2)$$

Ahora, de $\Delta x = x_2 - x_1$, se despeja x_2:
$x_2 = x_1 + \Delta x$
por lo que y_2 es:
$f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$
por lo tanto, sustituyendo en $\Delta y = y_2 - y_1$:
$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

Esto significa que al darle un incremento a x en el punto x_1 le corresponde a y un incremento:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Ahora, si a la expresión anterior se divide por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

se obtiene el *cociente de incrementos*.

III.2 DEFINICIÓN DE DERIVADA

Se define como derivada de una función $y=f(x)$ con respecto a x en un punto x_1, al límite, si existe, del cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero.

Esto significa que la derivada es el límite del cociente del incremento de la variable dependiente, entre el incremento de la variable independiente, cuando éste tiende a cero, y se denota por:

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Las notaciones más comunes de la derivada de la función $y=f(x)$ con respecto a x son:

y'	ó	$f'(x)$	Notación de Lagrange
$\frac{dy}{dx}$	ó	$\frac{df(x)}{dx}$	Notación de Leibniz
$D_x y$	ó	$D_x f(x)$	Notación de Cauchy
$\dot{y}$	ó	$\dot{f}(x)$	Notación de Newton

La más usada es la notación de Leibniz[1]. Las distintas partes de estas expresión carecen de todo significado cuando se consideran separadamente. Las d no son números, no pueden simplificarse, y la expresión completa no es el cociente de otros dos números $"dy"$ y $"dx"$'.

Leibniz llegó a este símbolo a través de su noción intuitiva de la derivada, que él consideraba no como el límite de los cocientes $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$, sino como el "valor" de este cociente cuando Δx es un número *infinitamente pequeño*. Esta cantidad "infinitamente pequeña" fue designada por dx y la correspondiente diferencia "infinitamente pequeña" $f(x+\Delta x)-f(x)$ por $df(x)$.

III.3 MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS

Para hallar la derivada de una función se sigue un procedimiento conocido como *método de los cuatro pasos* que consiste en:

1. A la función en x se le incrementa en Δx: $f(x+\Delta x)$
2. A lo obtenido, se le resta la función original, es decir $f(x+\Delta x)-f(x)$

[1] Leibniz es generalmente considerado como el codescubridor independiente del cálculo infinitesimal (junto con Newton).

3. Se divide todo por Δx : $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4. Se toma el límite cuando Δx tiende a cero: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, y si existe este límite, es su derivada.

Ejemplos.
Aplicando el método de los cuatro pasos, obtener la derivada de las siguientes funciones.

1) $y=5x-3$
Solución:
$f(x)=5x-3$
1er paso: $f(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)-3$
2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=5(x+\Delta x)-3-(5x-3)$
$=5x+5\Delta x-3-5x+3=5\Delta x$
3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{5\Delta x}{\Delta x}=5$
4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}5=5$
$\therefore\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=5$

2) $y=4x^2-7x+6$
Solución:
$f(x)=4x^2-7x+6$
1er paso: $f(x+\Delta x)=4(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)+6$
$=4\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)-7x-7\Delta x+6=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6$
2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6-\left(4x^2-7x+6\right)$
$=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6-4x^2+7x-6$
$=8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7\Delta x$
3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7\Delta x}{\Delta x}=8x+4\Delta x-7$
4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x-7)=8x-7$
$\therefore\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=8x-7$

3) $y=2x^3-5x-11$
Solución:
$f(x)=2x^3-5x-11$
1er paso: $f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)-11$
$=2\left(x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right)-5x-5\Delta x-11=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11-(2x^3-5x-11)$

$=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11-2x^3+5x+11=6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5\Delta x$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5\Delta x}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-5$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-5\right)=6x^2-5$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=6x^2-5$

4) $y=\frac{7}{x^2}$

Solución:

$f(x)=\frac{7}{x^2}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}-\frac{7}{x^2}$, simplificando las fracciones:

$$=\frac{7x^2-7(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7x^2-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

$$=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}}{\Delta x}=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2\Delta x}=\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{-14x}{x^2x^2}=\frac{-14x}{x^4}=-\frac{14}{x^3}$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{14}{x^3}$

5) $y=\sqrt{3x}$

Solución:

$f(x)=\sqrt{3x}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}-\sqrt{3x}$

multiplicando arriba y abajo por el conjugado del binomio, se tiene:

$$=\left(\sqrt{3x+3\Delta x}-\sqrt{3x}\right)\cdot\frac{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3x+3\Delta x-3x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}}{\Delta x}=\dfrac{3\Delta x}{\left(\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}\right)\Delta x}=\dfrac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$

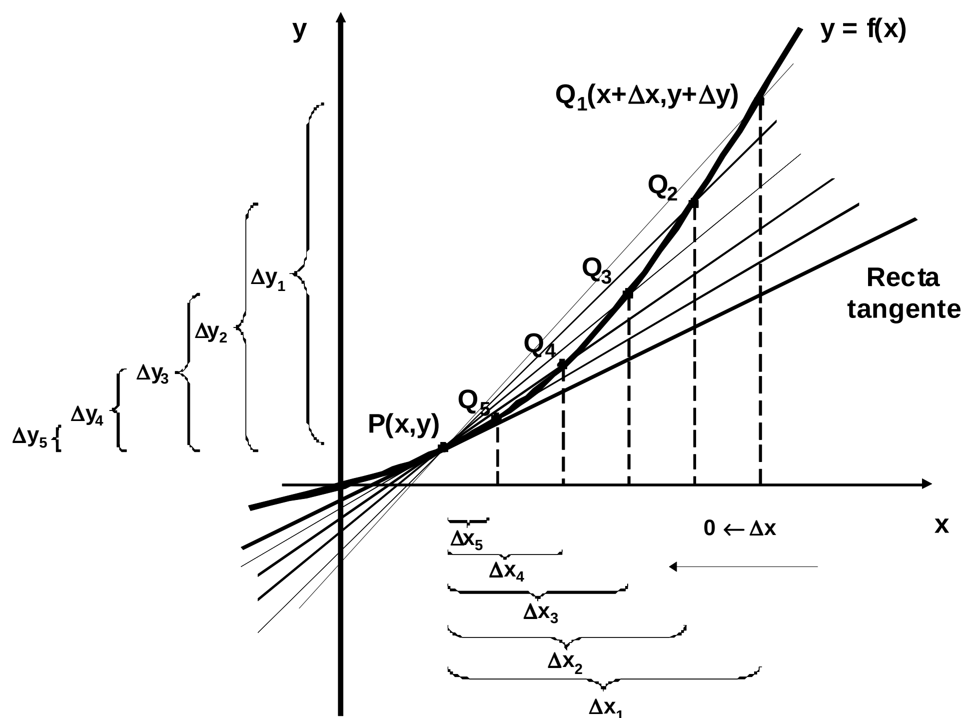
4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\dfrac{3}{\sqrt{3x}+\sqrt{3x}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

III.4 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Sea una función $y=f(x)$. Si se toma un punto cualquiera $P(x,y)$ y se efectúa un incremento cualquiera Δx_1 se obtiene su respectivo incremento Δy_1 en el punto $Q_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. La razón $\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ representa la pendiente del segmento $\overline{PQ_1}$.

Ahora, si P permanece fijo y Δx es cada vez más pequeño, lo que sucede es que el punto Q se mueve sobre la curva acercándose a P. Cada vez que disminuye Δx, la recta $\overline{PQ_1}$ gira en torno a P hasta que llega a su posición límite que es la tangente a la curva en el punto P. Por lo tanto el $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ es la pendiente de la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto P.



La interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x,y)$.

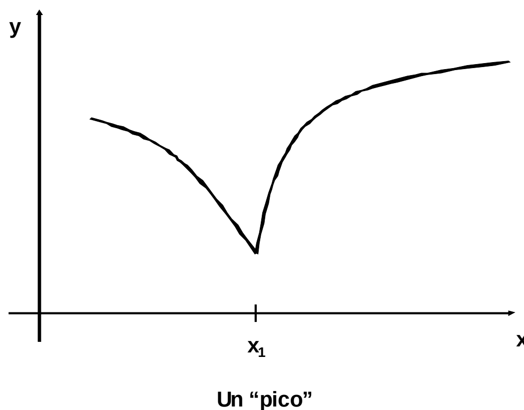
III.5 DERIVABILIDAD DE FUNCIONES

Una función $f(x)$ es derivable en el punto x_1 si $f'(a)$ existe. Por su parte, una función es derivable en un intervalo abierto (a,b) si es derivable en cualquier punto del intervalo.

Es importante resaltar que: si $f(x)$ es derivable en un punto x_1, entonces $f(x)$ es continua en x_1, sin embargo, el caso inverso, *no necesariamente es cierto* porque hay funciones que son continuas pero no son derivables.

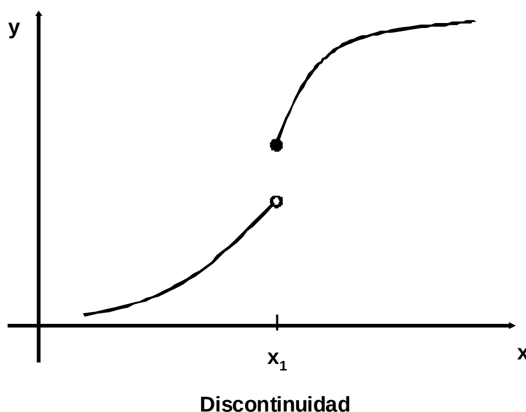
En general, si la gráfica de una función presenta cualquiera de los siguientes tres casos, entonces una función no es derivable.

1. Si posee “picos” ya que la función no posee tangente en esos puntos y no es derivable allí debido a que al calcular $f'(x_1)$ se encuentra que los límites laterales son diferentes.



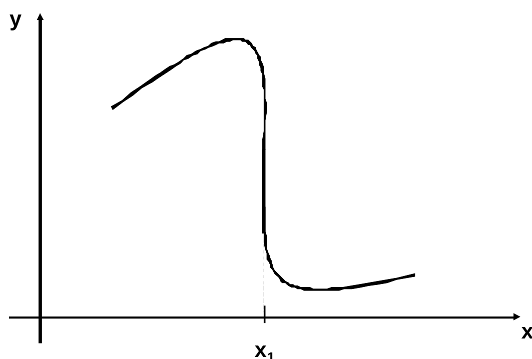
Un “pico”

2. Si una función $f(x)$ no es continua en x_1 entonces no es derivable en ese punto, por lo tanto, en cualquier discontinuidad, la función deja de ser derivable.



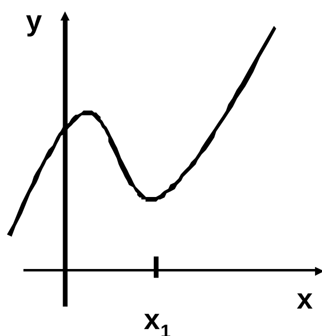
Discontinuidad

3. Si la curva tiene una recta tangente vertical cuando $x = x_1$. Esto es: $f(x)$ es continua en x_1 y $\lim_{x \to x_1} \left| f'(x_1) \right| = \infty$, lo que significa que las tangentes se vuelven cada vez más pronunciadas.

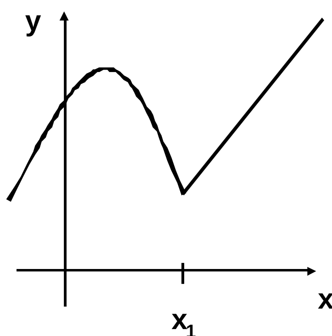


Tangente vertical

A pesar de que la gráfica tome la apariencia de una recta, mientras no presente un cambio brusco en forma de esquina, entonces la función es derivable. Las siguientes gráficas muestran esto en un punto $x = x_1$:



f(x) es derivable en x = x1



f(x) no es derivable en x = x1

Ejemplo.

Determinar los puntos en que la función $f(x) = |x|$ es derivable.

Solución:

Como el valor absoluto de x presenta tres posibles valores, se analiza por separado:

- Si $x > 0$, se tiene: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

Por tanto, la función es derivable para $x > 0$.

- Si $x < 0$, se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1$$

Por tanto, la función es derivable para $x<0$.

- Si $x=0$, se tiene:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} \quad \text{(si existe)}$$

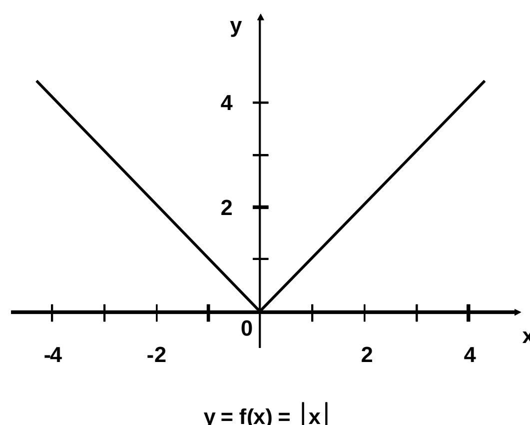
Se comparan los límites laterales por separado:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(-1)=-1$$

Puesto que $\lim_{\Delta x\to 0^+} f(0)\neq \lim_{\Delta x\to 0^-} f(0)$, no existe $f'(0)$. Por lo tanto $f(x)$ es derivable para toda x excepto en $x=0$.

En la gráfica siguiente se aprecia como la función no posee tangente en $x=0$.



y = f(x) = |x|

III.6 FÓRMULAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Sean las funciones $y=f(u)$ y $u=g(x)$, tal que se forme una composición de funciones que cumpla con: $y=f(g(x))$.

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función compuesta se obtiene por medio de:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Expresión conocida también como la *regla de la cadena*.

La regla de la cadena es muy útil en cambios de variable a fin de simplificar la derivación de funciones: a una parte de la función se le denota como u, se deriva la función respecto a esta variable, se le multiplica por $\frac{du}{dx}$ y finalmente se sustituye u por la parte correspondiente de la función original en x.

Sean u, v, w tres funciones de x, es decir, $u = f(x),\ v = f(x),\ w = f(x)$ y c una constante. Las once primeras formulas básicas de derivación, considerando la regla de la cadena, son:

1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Demostración:

$f(x) = c$

1er paso: $f(x + \Delta x) = c$

2º paso: $f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$

3er paso: $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(c) = 0$

La derivada de una constante siempre es cero.

2) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

Demostración:

$f(x) = x$

1er paso: $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$

2º paso: $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = x + \Delta x - x = \Delta x$

3er paso: $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(1) = 1$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$

La derivada de x*, respecto a si misma, es uno*.

3) $\frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$

Demostración:

$f(x) = c \cdot x$

1er paso: $f(x + \Delta x) = c(x + \Delta x)$

2º paso: $f(x + \Delta x) - f(x) = c(x + \Delta x) - cx = cx + c\Delta x - cx = c\Delta x$

3er paso: $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c\Delta x}{\Delta x} = c$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(c) = c$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$

La derivada de una función por una constante es igual a la constante.

4) $\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u+v+w$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)-u(x)-v(x)-w(x)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)+w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$

$=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$

$\therefore \quad f'(u+v+w)=\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de esas funciones.

5) $\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u\cdot v$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$

restando y sumando: $v(x)\cdot u(x+\Delta x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-v(x)\cdot u(x+\Delta x)+v(x)\cdot u(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]+v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to o}\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to o}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$\therefore \quad f'(u\cdot v)=\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

6) $\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$

restando y sumando: $u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)$ y $u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$
$$+\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$
$$+\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}+u(x+\Delta x)\cdot w(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$+v(x)\cdot w(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot w(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\cdot w(x)\cdot\lim_{\Delta x\to o}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$\therefore\quad f'(u\cdot v)=\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$

La derivada de un producto de tres funciones es igual al producto de la primera y la segunda funciones por la derivada de la tercera, más el producto de la primera y la tercera funciones por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda y la tercera funciones por la derivada de la primera.

7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{c}\right)=\frac{1}{c}\qquad c\neq 0$

Demostración:

$f(x)=\frac{x}{c}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\frac{(x+\Delta x)}{c}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{(x+\Delta x)}{c}-\frac{x}{c}=\frac{x}{c}+\frac{\Delta x}{c}-\frac{x}{c}=\frac{\Delta x}{c}$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\frac{\Delta x}{c}}{\Delta x}=\dfrac{1}{c}$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{c}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{c}\right)=\dfrac{1}{c} \qquad c\neq 0$

La derivada del cociente de la función identidad sobre una constante es igual al inverso multiplicativo de la constante.

8) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{x}\right)=c\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

Demostración:

$f(x)=\dfrac{c}{x}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\dfrac{c}{x+\Delta x}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{c}{x+\Delta x}-\dfrac{c}{x}=\dfrac{cx-c(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\dfrac{cx-cx-c\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{-\frac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=-\dfrac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\dfrac{c}{x(x+\Delta x)}$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{c}{x(x+\Delta x)}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{x}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

La derivada del cociente de una constante sobre la función identidad es igual a la constante dividida por el cuadrado de la función afectado todo por un signo negativo.

9) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad v\neq 0$

Demostración:

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$

restando y sumando: $u(x)\cdot v(x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot \Delta x}$$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot \Delta x}$

$$=\frac{v(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-u(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\dfrac{du}{dx}-u\cdot\dfrac{dv}{dx}}{v^2}; \qquad v\neq 0$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

10) $\frac{d}{dx}x^n = n\cdot x^{n-1}$

Demostración:

$f(x)=x^n$

1er paso: $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\frac{\left[x^n+\dfrac{nx^{n-1}\Delta x}{1!}+\dfrac{n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2}{2!}+\dfrac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^3}{3!}+\cdots+(\Delta x)^n\right]-x^n}{\Delta x}$$

$$=\frac{nx^{n-1}}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2}{3!}+\cdots(\Delta x)^{n-1}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{nx^{n-1}}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2}{3!}+\cdots(\Delta x)^{n-1}\right]=n\cdot x^{n-1}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=n\cdot x^{n-1}$$

La derivada de una potencia de x es igual al exponente multiplicado por x elevado al exponente menos uno.

En resumen y aplicando la regla de la cadena, en donde $u=f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}(c)=0$

2) $\frac{d}{dx}(x)=1$

3) $\frac{d}{dx}(c\cdot u)=c\cdot\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$

7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dx} \qquad c\neq 0$

8) $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=c\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{c}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}$

9) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad v\neq 0$

10) $\frac{d}{dx}u^n=n\cdot u^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Aplicando las fórmulas de derivación, obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $y=4$

$\frac{dy}{dx}=0$

2) $y=7x$

$\frac{dy}{dx}=7$

3) $y=4x^3$

$\frac{dy}{dx}=12x^2$

4) $y=8x^2-5x+6$

$\frac{dy}{dx}=16x-5$

5) $y=x^3-9x^2-11x+1$

$\frac{dy}{dx}=3x^2-18x-11$

6) $y=(6x^2-7x-2)^5$

Aplicando la regla de la cadena:

$u=6x^2-7x-2$

$y=u^5$

$\frac{dy}{du}=5u^4$

$\frac{du}{dx}=12x-7$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=5(6x^2-7x-2)^4(12x-7)$

para fines prácticos, se deriva a la función del paréntesis en su conjunto (u) y se multiplica por la derivada del contenido del paréntesis:

7) $y=\left(8x^4-5x^2-13x\right)^3$

$$\frac{dy}{dx}=3\left(8x^4-5x^2-13x\right)^2\left(32x^3-10x-13\right)$$

8) $y=\left(7x^3-2x^4-5x-6\right)^5$

$$\frac{dy}{dx}=5\left(7x^3-2x^4-5x-6\right)^4\left(21x^2-8x^3-5\right)$$

9) $y=\left(9x^2-12x+8\right)\left(-5x^2-11x+4x^3-13\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(9x^2-12x+8\right)\left(-10x-11+12x^2\right)+\left(-5x^2-11x+4x^3-13\right)\left(18x-12\right)$$

10) $y=\left(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5\right)\left(15x^2-6x+9\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5\right)\left(30x-6\right)+\left(15x^2-6x+9\right)\left(40x^3-48x^2-16x+7\right)$$

11) $y=\left(11x^2-17x\right)\left(8x^3-9\right)\left(6x^4-4\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(11x^2-17x\right)\left(8x^3-9\right)\left(24x^3\right)+\left(11x^2-17x\right)\left(6x^4-4\right)\left(24x^2\right)+\left(8x^3-9\right)\left(6x^4-4\right)\left(22x-17\right)$$

12) $y=\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(2x^2+1\right)\left(3x^3-16x^2\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(2x^2+1\right)\left(9x^2-32x\right)+\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(3x^3-16x^2\right)\left(4x\right)$$
$$+\left(2x^2+1\right)\left(3x^3-16x^2\right)\left(15x^4-48x^3\right)$$

13) $y=\left(4x^2-9x^3\right)^5\left(6x^8+14x\right)^7$

$$\frac{dy}{dx}=\left(4x^2-9x^3\right)^5 7\left(6x^8+14x\right)^6\left(48x^7+14\right)+\left(6x^8+14x\right)^7 5\left(4x^2-9x^3\right)^4\left(8x-27x^2\right)$$

14) $y=\dfrac{4x^2-x-11}{6}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-1}{6}$$

15) $y=\dfrac{7\left(4x^3-2x^5-1\right)^3}{-9}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{21\left(4x^3-2x^5-1\right)^2\left(12x^2-10x^4\right)}{9}$$

16) $y=\sqrt{x}$

$$y=x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

17) $y=\sqrt[5]{x^3}$

$$y = x^{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

18) $y = \sqrt[4]{9x^6}$

$$y = \left(9x^6\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\left(9x^6\right)^{-\frac{3}{4}}54x^5 = \frac{54x^5}{4\left(9x^6\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{54x^5}{4\sqrt[4]{\left(9x^6\right)^3}}$$

19) $y = \sqrt[6]{2x^8}$

$$y = \left(2x^8\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\left(2x^8\right)^{-\frac{5}{6}}16x^7 = \frac{16x^7}{6\left(2x^8\right)^{\frac{5}{6}}} = \frac{8x^7}{3\sqrt[6]{\left(2x^8\right)^5}}$$

20) $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{4}{7}}} = x^{-\frac{4}{7}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{7}x^{-\frac{11}{7}} = -\frac{4}{7x^{\frac{11}{7}}} = -\frac{4}{7\sqrt[7]{x^{11}}}$$

21) $y = \sqrt[3]{2x - 7x^4}$

$$y = \left(2x - 7x^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(2x - 7x^4\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2 - 28x^3\right) = \frac{2 - 28x^3}{3\left(2x - 7x^4\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 - 28x^3}{3\sqrt[3]{\left(2x - 7x^4\right)^2}}$$

22) $y = \frac{-41}{\sqrt[6]{5x^9 - 8x^2}}$

$$y = \frac{-41}{\left(5x^9 - 8x^2\right)^{\frac{1}{6}}} = -41\left(5x^9 - 8x^2\right)^{-\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{41}{6}\left(5x^9 - 8x^2\right)^{-\frac{7}{6}}\left(45x^8 - 16x\right) = \frac{41\left(45x^8 - 16x\right)}{6\left(5x^9 - 8x^2\right)^{\frac{7}{6}}} = \frac{41\left(45x^8 - 16x\right)}{6\sqrt[6]{\left(5x^9 - 8x^2\right)^7}}$$

23) $y = \frac{7x^2 - 3x - 2}{5x^2 - 11x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(5x^2 - 11x\right)\left(14x - 3\right) - \left(7x^2 - 3x - 2\right)\left(10x - 11\right)}{\left(5x^2 - 11x\right)^2}$$

24) $y = \frac{8x^4 - 13x^3 + 4}{7x^5 + x - 5x^6}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(7x^5 + x - 5x^6)(32x^3 - 39x^2) - (8x^4 - 13x^3 + 4)(35x^4 + 1 - 30x^5)}{(7x^5 + x - 5x^6)^2}$$

25) $y = \frac{(7x^3 - 11x - 1)^3}{\sqrt[5]{x^8 - 2x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt[5]{x^8 - 2x}\right)3(7x^3 - 11x - 1)^2(21x^2 - 11) - (7x^3 - 11x - 1)^3 \frac{1}{5}(x^8 - 2x)^{-\frac{4}{5}}(8x^7 - 2)}{\left(\sqrt[5]{x^8 - 2x}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt[5]{x^8 - 2x}\right)3(7x^3 - 11x - 1)^2(21x^2 - 11) - (7x^3 - 11x - 1)^3 \frac{8x^7 - 2}{5\sqrt[5]{(x^8 - 2x)^4}}}{\left(\sqrt[5]{x^8 - 2x}\right)^2}$$

26) $y = \frac{17}{x^5 - 3}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{17(5x^4)}{(x^5 - 3)^2}$$

27) $y = \frac{6}{3x^6 - 5x^4}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6(18x^5 - 20x^3)}{(3x^6 - 5x^4)^2}$$

28) $y = \frac{-14}{(8x^9 - 2x)^3}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(-14)3(8x^9 - 2x)^2(72x^8 - 2)}{(8x^9 - 2x)^6} = \frac{14(72x^8 - 2)}{(8x^9 - 2x)^4}$$

29) $y = \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{7}{x^3}$

$$y = 4x^{-1} - 12x^{-2} + 7x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -4x^{-2} + 24x^{-3} - 21x^{-4} = -\frac{4}{x^2} + \frac{24}{x^3} - \frac{21}{x^4}$$

30) $y = \frac{6}{8x^7} + \frac{14}{5x^2} + 9x - 3x^2 - \frac{15}{x^4}$

$$y = \frac{6}{8}x^{-7} + \frac{14}{5}x^{-2} + 9x - 3x^2 - 15x^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{42}{8}x^{-8} - \frac{28}{5}x^{-3} + 9 - 6x + 60x^{-5} = -\frac{42}{8x^8} - \frac{28}{5x^3} + 9 - 6x + \frac{60}{x^5}$$

III.7 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = f(x)$ se conoce como primera derivada. Si ésta es a su vez una función derivable, su derivada se denomina *segunda derivada* de la función original, que se denota como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x)$$

La derivada de la segunda derivada, en caso de existir, se conoce como *tercera derivada* de la función:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x)$$

El proceso es sucesivo, y mientras exista, la *derivada enésima* es: $\frac{d^n y}{dx^n} = f^{n}(x)$.

Ejemplo.
Obtener la tercera derivada de la función $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 12$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 8x - 5$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 12x - 8$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 12$$

Ejemplo.
Obtener la quinta derivada de la función $y = 2x^6 - 7x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 19$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^5 - 28x^3 + 15x^2 - 18x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 60x^4 - 84x^2 + 30x - 18$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 240x^3 - 168x + 30$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = 720x^2 - 168$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right) = 1{,}440x$$

Ejemplo.

Obtener la séptima derivada de la función $y = \frac{5}{x}$

Solución:

$$y = 5x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -5x^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 10x^{-3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -30x^{-4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 120x^{-5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = -600x^{-6}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) = 3{,}600x^{-7}$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^6y}{dx^6}\right) = 25{,}200x^{-8} = \frac{25{,}200}{x^8}$$

III.8 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA IMPLÍCITA

Como se definió en el primer capítulo, una función expresada en forma implícita es de la forma $f(x, y) = 0$. Para encontrar la derivada podría encontrarse su equivalente forma explícita y derivar. Sin embargo, como se sabe, no siempre es fácil despejar la variable dependiente, por lo que resulta necesario derivar en forma implícita.

En este sentido, la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $f(x, y) = 0$ se puede obtener efectuando el procedimiento que consta de los siguientes pasos:

1. Se expresa el operador $\frac{dy}{dx}$ a cada término de la función
2. Se deriva cada término, considerando la regla del producto (que en su caso aplique), y además, tomando en cuenta que la derivada de una función en y con respecto a x es igual a la derivada de esta función con respecto a y multiplicada por la derivada de y con respecto a x, esto es: $\frac{df(y)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$
3. Se acomodan en el primer miembro todos los términos que posean al operador $\frac{dy}{dx}$ y en el segundo miembro a los que no lo tengan, siempre respetando las reglas de los signos.

4. Se factoriza el operador $\frac{dy}{dx}$

5. Finalmente, se obtiene la derivada $\frac{dy}{dx}$ al despejarla de la expresión resultante.

Ejemplos.
Hallar la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

1) $4x^2y^3 + 5x^4 - 2y^5 - 12 = 0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}4x^2y^3 + \frac{d}{dx}5x^4 - \frac{d}{dx}2y^5 - \frac{d}{dx}12 = \frac{d}{dx}0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx} + y^3 8x + 20x^3 - 10y^4\frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx} - 10y^4\frac{dy}{dx} = -8xy^3 - 20x^3$$

$$\frac{dy}{dx}\left(12x^2y^2 - 10y^4\right) = -8xy^3 - 20x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8xy^3 - 20x^3}{12x^2y^2 - 10y^4}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x^3 - 7y^5 + 15 = 0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}3x^5 - \frac{d}{dx}6x^4y^6 + \frac{d}{dx}2y^3 + \frac{d}{dx}8x^3 - \frac{d}{dx}7y^5 + \frac{d}{dx}15 = \frac{d}{dx}0$$

$$15x^4 - \left(6x^4 6y^5\frac{dy}{dx} + y^6 24x^3\right) + 6y^2\frac{dy}{dx} + 24x^2 - 35y^4\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$15x^4 - 36x^4y^5\frac{dy}{dx} - 24x^3y^6 + 6y^2\frac{dy}{dx} + 24x^2 - 35y^4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-36x^4y^5\frac{dy}{dx} + 6y^2\frac{dy}{dx} - 35y^4\frac{dy}{dx} = -15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4\right) = -15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

3) $8x^4 - 2x^3y^4 + 7x^7 - 10x^3y - 11 = 0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}8x^4 - \frac{d}{dx}2x^3y^4 + \frac{d}{dx}7x^7 - \frac{d}{dx}10x^3y - \frac{d}{dx}11 = \frac{d}{dx}0$$

$$32x^3 - \left(2x^3 4y^3\frac{dy}{dx} + y^4 6x^2\right) + 49x^6 - \left(10x^3\frac{dy}{dx} + y30x^2\right) - 0 = 0$$

$$32x^3 - 8x^3y^3\frac{dy}{dx} - 6x^2y^4 + 49x^6 - 10x^3\frac{dy}{dx} - 30x^2y = 0$$

$$-8x^3y^3\frac{dy}{dx} - 10x^3\frac{dy}{dx} = -32x^3 + 6x^2y^4 - 49x^6 + 30x^2y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-8x^3y^3 - 10x^3\right) = -32x^3 + 6x^2y^4 - 49x^6 + 30x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-32x^3 + 6x^2y^4 - 49x^6 + 30x^2y}{-8x^3y^3 - 10x^3}$$

4) $6x^3 - 11x^2y^3 + 5y^4 - 8x^3y^5 + 5x - 11 = 0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}6x^3 - \frac{d}{dx}11x^2y^3 + \frac{d}{dx}5y^4 - \frac{d}{dx}8x^3y^5 + \frac{d}{dx}5x - \frac{d}{dx}11 = \frac{d}{dx}0$$

$$18x^2 - \left(11x^2 3y^2\frac{dy}{dx} + y^3 22x\right) + 20y^3\frac{dy}{dx} - \left(8x^3 5y^4\frac{dy}{dx} + y^5 24x^2\right) + 5 - 0 = 0$$

$$18x^2 - 33x^2y^2\frac{dy}{dx} - 22xy^3 + 20y^3\frac{dy}{dx} - 40x^3y^4\frac{dy}{dx} - 24x^2y^5 + 5 = 0$$

$$-33x^2y^2\frac{dy}{dx} + 20y^3\frac{dy}{dx} - 40x^3y^4\frac{dy}{dx} = -18x^2 + 22xy^3 + 24x^2y^5 - 5$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-33x^2y^2 + 20y^3 - 40x^3y^4\right) = -18x^2 + 22xy^3 + 24x^2y^5 - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-18x^2 + 22xy^3 + 24x^2y^5 - 5}{-33x^2y^2 + 20y^3 - 40x^3y^4}$$

5) $8x^4 + 12x^3y^2 + 9y^2 - 10xy + 6x - 4 = 0$

Solución:

$$\frac{d}{dx}8x^4 + \frac{d}{dx}12x^3y^2 + \frac{d}{dx}9y^2 - \frac{d}{dx}10xy + \frac{d}{dx}6x - \frac{d}{dx}4 = \frac{d}{dx}0$$

$$32x^3 + \left(12x^3 2y\frac{dy}{dx} + y^2 36x^2\right) + 18y\frac{dy}{dx} - \left(10x\frac{dy}{dx} + y10\right) + 6 - 0 = 0$$

$$32x^3 + 24x^3y\frac{dy}{dx} + 36x^2y^2 + 18y\frac{dy}{dx} - 10x\frac{dy}{dx} - 10y + 6 = 0$$

$$24x^3y\frac{dy}{dx} + 18y\frac{dy}{dx} - 10x\frac{dy}{dx} = -32x^3 - 36x^2y^2 + 10y - 6$$

$$\frac{dy}{dx}\left(24x^3y + 18y - 10x\right) = -32x^3 - 36x^2y^2 + 10y - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-32x^3 - 36x^2y^2 + 10y - 6}{24x^3y + 18y - 10x}$$

Si se tiene una función $f(x, y) = 0$, se conoce como *derivada parcial de* f *con respecto a* x a la derivada de la función, sólo considerando a x como variable y lo demás como constante[2]. Se denota como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Similarmente, la *derivada parcial de* f *con respecto a* y es la derivada de la función, sólo considerando a y como variable y lo demás como constante. Se denota como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ejemplos.
Obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de las siguientes funciones:

1) $3x^2 + 7x^4y^2 + 8x^2y^6 - 9y^5 + 6x + 2 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 28x^3y^2 + 16xy^6 + 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 14x^4y + 48x^2y^5 - 45y^4$$

2) $4x^4y^3 - 6x^2 + 3y^7 - 9x^2y^4 - 12 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16x^3y^3 - 12x - 18xy^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^4y^2 + 21y^6 - 36x^2y^3$$

Dada una función implícita de la forma $f(x, y)$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede obtenerse muy fácilmente a través de la aplicación de derivadas parciales, por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Ejemplos.
Aplicando derivadas parciales, obtener $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

[2] La definición de derivada parcial es mucho más formal y amplia que lo expuesto. El concepto dado aquí es sólo para poseer otro recurso para resolver derivadas expresadas en forma implícita. En cursos posteriores de Cálculo se comprenderá el importante significado y utilidad de una derivada parcial.

1) $5x^4 - 12x^3y^2 + 9y^2 - 10 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-20x^3 + 36x^2y^2}{-24x^3y + 18y}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x - 7y^5 + 15 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 8}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

Ejemplos.

Comprobar los resultados de los primeros cinco ejercicios resueltos de este subtema.

1) $4x^2y^3 + 5x^4 - 2y^5 - 12 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-8xy^3 - 20x^3}{12x^2y^2 - 10y^4}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x^3 - 7y^5 + 15 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

3) $8x^4 - 2x^3y^4 + 7x^7 - 10x^3y - 11 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 + 6x^2y^4 - 49x^6 + 30x^2y}{-8x^3y^3 - 10x^3}$$

4) $6x^3 - 11x^2y^3 + 5y^4 - 8x^3y^5 + 5x - 11 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-18x^2 + 22xy^3 + 24x^2y^5 - 5}{-33x^3y^2 + 20y^3 - 40x^3y^4}$$

5) $8x^4 + 12x^3y^2 + 9y^2 - 10xy + 6x - 4 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 - 36x^2y^2 + 10y - 6}{24x^3y + 18y - 10x}$$

III.9 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Dada una función expresada en forma paramétrica, tal y como se definió en el tema I.6, de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t) \end{aligned}\right\}$$

Su derivada viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ejemplos.

Obtener la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $$\left.\begin{aligned} x &= 4t^2 - 6t + 9 \\ y &= 5t^3 - 7t^2 - 10t + 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t - 6}{15t^2 - 14t - 10}$$

2) $$\left.\begin{aligned} x &= \left(8t^3 - 11t^2 - 13\right)^4 \\ y &= \left(12t^4 - 13t^2\right)\left(4t^2 - 5t^5\right) \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Para hallar $\frac{dx}{dt}$ se aplica la regla de la cadena y para encontrar $\frac{dy}{dt}$ se aplica la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(12t^4 - 13t^2\right)\left(8t - 25t^4\right) + \left(4t^2 - 5t^5\right)\left(48t^3 - 26t\right)}{4\left(48t^3 - 11t^2 - 13\right)^3\left(24t^2 - 22t\right)}$$

3) $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{t} \\ y &= \sqrt[8]{5t} \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x &= t^{\frac{1}{3}} \\ y &= (5t)^{\frac{1}{8}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{5}{8\sqrt[8]{(5t)^7}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}$$

4) $\left.\begin{aligned} x &= -\frac{3}{t^5} \\ y &= \frac{2}{\sqrt{t}} \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x &= -3t^{-5} \\ y &= 2t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{t^3}}}{\frac{15}{t^6}}$$

5) $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{2-9t^4} \\ y &= \frac{4t-8}{6t^3-7t^5} \end{aligned}\right\}$

Solución:

Para hallar $\frac{dx}{dt}$ se aplica la regla $\frac{d}{dt}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dt}$ y para encontrar $\frac{dy}{dt}$ se aplica la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{(6t^3-7t^5)(4)-(4t-8)(18t^2-35t^4)}{(6t^3-7t^5)^2}}{-\frac{18t^3}{\sqrt{2-9t^4}}}$$

La segunda derivada de una función expresada en forma paramétrica está dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

Ejemplos.
Obtener la segunda derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $\left.\begin{array}{l} x=4t^2-5t+1 \\ y=2t^3-21 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2}{8t-5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{6t^2}{8t-5}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{(8t-5)(12t)-(6t^2)(8)}{(8t-5)^2}\cdot\frac{1}{8t-5}=\frac{96t^2-60t-48t^2}{(8t-5)^3}$$

$$=\frac{48t^2-60t}{(8t-5)^3}$$

2) $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{t} \\ y=3t^5 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{15t^4}{-\frac{1}{t^2}}=-15t^6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-15t^6\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-90t^5\cdot\left(-t^2\right)=90t^7$$

III.10 DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Sea una función $y=f(x)$ en el intervalo abierto (a,b) cuya derivada no cambia de signo. Si su función inversa es $x=g(y)$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ viene dada por:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Ejemplos.
Obtener la derivada de la función inversa de:

1) $f(x)=8x-6$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:
$$x=8y-6 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x+6}{8}$$
$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{8}$$
Forma 2. Aplicando la fórmula:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{8}$$

2) $f(x)=x^2-5$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:
$$x=y^2-5 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x+5}$$
$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$
Forma 2. Aplicando la fórmula:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

3) $f(x)=\sqrt{4x+1}$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:
$$x=\sqrt{4y+1} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x^2-1}{4}$$
$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$$
Forma 2. Aplicando la fórmula:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{4}{2\sqrt{4y+1}}}=\frac{2\sqrt{4y+1}}{4}=\frac{x}{2}$$

Ejemplos.
Aplicando la expresión $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=(x+3)^2$

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=(y+3)^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2(y+3)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{x}-3+3\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $f(x)=\frac{5}{x}$

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{5}{y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{5}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{-5}{y^2}}=-\frac{y^2}{5}=-\frac{\left(\frac{5}{x}\right)^2}{5}=-\frac{25}{5x^2}=-\frac{5}{x^2}$$

3) $f(x)=\frac{2}{x-17}$

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{2}{y-17} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{2}{x}+17$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{2}{(y-17)^2}}=-\frac{(y-17)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}-17+17\right)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2}=-\frac{2}{x^2}$$

4) $f(x)=\sqrt[3]{4x^2+10}$.

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\sqrt[3]{4y^2+10} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(4y^2+10\right)^{-\frac{2}{3}}(8y)}=\frac{3\sqrt[3]{\left(4y^2+10\right)^2}}{8y}=\frac{3x^2}{8\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}}$$

III.11 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

Las funciones trigonométricas o circulares directas fueron expuestas con amplitud en el capítulo II del libro de Matemáticas V de esta misma serie. Las derivadas de estas funciones se deducen a continuación:

1) $\frac{d}{dx}(sen\,x)=\cos x$

Demostración:

1er paso: $f(x+\Delta x)=sen(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=sen(x+\Delta x)-sen\,x$

considerando la identidad trigonométrica: $sen(a+b)-sen\,a=2\cos\left(a+\frac{1}{2}b\right)\cdot sen\frac{1}{2}b$

se tiene: $f(x+\Delta x)-f(x)=2\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot sen\frac{1}{2}\Delta x$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot sen\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

pero se sabe que: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}=1$

$$\Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot 1=\cos x$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}(sen\,x)=\cos x$$

2) $\frac{d}{dx}(\cos x)=-sen\,x$

Demostración:

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos x=sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$, se tiene:

$$f(x)=sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$$

derivando la función:

$$\frac{d}{dx}sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)=(-1)\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$$

pero se sabe que: $sen\,x=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\cos x)=-sen\,x$$

3) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{sen\ x}{\cos x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x)=\frac{\cos x(\cos x)-sen\ x(-sen\,x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+sen^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

4) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{\cos x}{sen\ x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x)=\frac{sen\,x(-sen\,x)-\cos\ x(\cos x)}{(sen\,x)^2}=\frac{-sen^2 x-\cos^2 x}{sen^2 x}=\frac{-1(sen^2 x+\cos^2 x)}{sen^2 x}$$

$$=\frac{-1}{sen^2 x}=-\csc^2 x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

5) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x)=-\frac{(-sen\,x)}{(\cos x)^2}=\frac{sen\,x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{sen\,x}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x$$

6) $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x$

Demostración:

$$f(x)=\frac{1}{sen\ x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x)=-\frac{(\cos x)}{(sen\,x)^2}=-\frac{\cos x}{sen^2 x}=-\frac{1}{sen\,x}\cdot\frac{\cos x}{sen\,x}=-\csc x\cdot\cot x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x$$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u=f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}sen\,u=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}\cos u=-sen\,u\cdot\frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\cdot\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\cdot\frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\cdot\tan u\cdot\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cdot\cot u\cdot\frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Derivar las siguientes funciones trigonométricas.

1) $y=sen\,4x$

$$\frac{dy}{dx}=4\cos 4x$$

2) $y=3\cos 9x$

$$\frac{dy}{dx}=3(9)(-sen\,9x)=-27sen\,9x$$

3) $y=5\tan 2x^3$

$$\frac{dy}{dx}=5(6x^2)\sec^2 2x^3=30x^2\sec^2 2x^3$$

4) $y=6\cot\left(5x^2-8x^7\right)$

$$\frac{dy}{dx}=-6\left(10x-56x^6\right)\csc^2\left(5x^2-8x^7\right)=\left(-60x+336x^6\right)\csc^2\left(5x^2-8x^7\right)$$

5) $y=8\sec 2x^4$

$$\frac{dy}{dx}=8(8x^3)\sec 2x^4\tan 2x^4=64x^3\sec 2x^4\tan 2x^4$$

6) $y=4\csc\left(3x^5-6x\right)$

$$\frac{dy}{dx}=-4\left(15x^4-6\right)\csc\left(3x^5-6x\right)\cot\left(3x^5-6x\right)=\left(-60x^4+24\right)\csc\left(3x^5-6x\right)\cot\left(3x^5-6x\right)$$

7) $y=12sen\left(4x^2-9x+7\right)$

$$\frac{dy}{dx}=12(8x-9)\cos\left(4x^2-9x+7\right)=(96x-108)\cos\left(4x^2-9x+7\right)$$

8) $y = -6\cos\left(10x^3 - 8x + 3\right)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 30\left(10x^3 - 8x + 3\right)^4\left(30x^2 - 8\right)sen\left(10x^3 - 8x + 3\right)^5$$

9) $y = \sqrt{\tan 3x}$

$$y = \left(\tan 3x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\tan 3x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3\sec^2 3x\right) = \frac{3\sec^2 3x}{2\sqrt{\tan 3x}}$$

10) $y = \left(4\cot 2x^2\right)\left(\sec 5x^4\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \left(4\cot 2x^2\right)\left(20x^3\sec 5x^4\tan 5x^4\right) + \left(\sec 5x^4\right)\left(-4\left(4x\right)\csc^2 2x^2\right)$$

$$= 80x^3\cot 2x^2\sec 5x^4\tan 5x^4 - 16x\sec 5x^4\csc^2 2x^2$$

11) $y = \dfrac{7\csc 2x^3}{-5sen 8x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-5sen 8x\right)\left(-7\left(6x^2\right)\csc 2x^3\cot 2x^3\right) - \left(7\csc 2x^2\right)\left(-5\left(8\right)\cos 8x\right)}{\left(-5sen 8x\right)^2}$$

$$= \frac{210x^2 sen 8x\csc 2x^3\cot 2x^3 + 280\csc 2x^2\cos 8x}{25sen^2 8x}$$

12) $y = sen\, x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos x^2$$

13) $y = sen^2 x$

$$y = \left(sen\, x\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2sen\, x\cdot\cos x$$

Nótese como las funciones de los ejercicios 12 y 13, aunque aparentemente son similares, son muy diferentes: en el primer caso el cuadrado está afectando al argumento de la función. En el segundo caso, el cuadrado está afectando a la función seno. En conclusión, sus derivadas son totalmente distintas. Algo muy similar sucede con los siguientes dos ejercicios:

14) $y = \cos x^3$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 sen\, x^3$$

15) $y = \cos^3 x$

$$y = \left(\cos x\right)^3$$

$$\frac{dy}{dx}=3\cos^2 x\left(-\,sen\,x\right)=-3\cos^2 x\,sen\,x$$

16) $y=\cot^7 9x^4$

$$y=\left(\cot 9x^4\right)^7$$

$$\frac{dy}{dx}=7\cot^6 9x^4\left(-36x^3\csc^2 9x^4\right)=-252x^3\cot^6 9x^4\csc^2 9x^4$$

17) $y=\left(10\sec 15x^3\right)\left(8\tan 9x\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(10\sec 15x^3\right)\left(8(9)\sec^2 9x\right)+\left(8\tan 9x\right)\left(10\left(45x^2\right)\sec 15x^3\tan 15x^3\right)$$

$$=720\sec 15x^3\sec^2 9x+3600x^2\tan 9x\sec 15x^3\tan 15x^3$$

18) $y=\dfrac{sen10x^3}{\cos 10x^3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\cos 10x^3\right)\left(30x^2\cos 10x^3\right)-\left(sen10x^3\right)\left(-30x^2 sen10x^3\right)}{\left(\cos 10x^3\right)^2}$$

$$=\frac{30x^2\cos^2 10x^3+30x^2 sen^2 10x^3}{\cos^2 10x^3}=\frac{30x^2\left(\cos^2 10x^3+sen^2 10x^3\right)}{\cos^2 10x^3}=\frac{30x^2}{\cos^2 10x^3}=30x^2\sec^2 10x^3$$

19) $y=\tan 10x^3$

$$\frac{dy}{dx}=30x^2\sec^2 10x^3$$

Se observa como la derivada de las funciones de los ejercicios 18 y 19 son iguales. Eso significa que aplicar convenientemente identidades trigonométricas puede simplificar notablemente el proceso de derivación. Un caso similar sucede con las derivadas de los ejercicios 20 y 21:

20) $y=\dfrac{1}{sen^5\left(11x^4-6x^2+8\right)}$

$$y=sen^{-5}\left(11x^4-6x^2+8\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-5\left(44x^3-12x\right)sen^{-6}\left(11x^4-6x^2+8\right)\cos\left(11x^4-6x^2+8\right)$$

pero como $\dfrac{\cos u}{sen\,u}=\cot u$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5\left(44x^3-12x\right)\cos\left(11x^4-6x^2+8\right)}{sen^6\left(11x^4-6x^2+8\right)}=-\frac{5\left(44x^3-12x\right)\cot\left(11x^4-6x^2+8\right)}{sen^5\left(11x^4-6x^2+8\right)}$$

y $\dfrac{1}{sen\,u}=\csc u$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=-5\left(44x^3-12x\right)\cot\left(11x^4-6x^2+8\right)\csc^5\left(11x^4-6x^2+8\right)$$

21) $y=\csc^5\left(11x^4-6x^2+8\right)$

$$\frac{dy}{dx}=5\left(44x^3-12x\right)\csc^4\left(11x^4-6x+8\right)\cdot\left(-\csc\left(11x^4-6x^2+8\right)\cot\left(11x^4-6x^2+8\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-5\left(44x^3-12x\right)\cot\left(11x^4-6x^2+8\right)\cdot\csc^5\left(11x^4-6x^2+8\right)$$

III.12 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas definidas poseen reglas de derivación. A continuación se deducen las seis fórmulas considerando sus respectivos campos de variación.

1) $\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Demostración:

$y=sen^{-1}x \quad\Rightarrow\quad x=sen\,y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}sen\,y=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$sen^2y+\cos^2y=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+\cos^2y=1 \quad\Rightarrow\quad \cos y=\sqrt{1-x^2}$$

$$1=\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Demostración:

$y=\cos^{-1}x \quad\Rightarrow\quad x=\cos y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\cos y=-sen\,y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=-sen\,y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$sen^2y+\cos^2y=1 \quad\Rightarrow\quad sen^2y+x^2=1 \quad\Rightarrow\quad sen\,y=\sqrt{1-x^2}$$

$$1=-\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)=\frac{1}{1+x^2}$

Demostración:

$y=\tan^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\tan y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\tan y=\sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2 y=1+\tan^2 y \quad \Rightarrow \quad \sec^2 y=1+x^2$$

$$1=\left(1+x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

4) $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right)=\frac{-1}{1+x^2}$

Demostración:

$y=\cot^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\cot y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\cot y=-\csc^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=-\csc^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\csc^2 y=1+\cot^2 y \quad \Rightarrow \quad \csc^2 y=1+x^2$$

$$1=-\left(1+x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right)=\frac{-1}{1+x^2}$$

5) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demostración:

$y=\sec^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\sec y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\sec y=\sec y\cdot\tan y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\sec\ y\cdot\tan y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2 y=1+\tan^2 y \quad \Rightarrow \quad \tan^2 y=\sec^2 y-1 \quad \Rightarrow \quad \tan y=\sqrt{x^2-1}$$

$$1=x\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

6) $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demostración:

$y=\csc^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x=\csc y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\csc y=-\csc y\cdot\cot y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=-\csc y\cdot\cot y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\csc^2 y=1+\cot^2 y \quad \Rightarrow \quad \cot^2 y=\csc^2 x-1 \quad \Rightarrow \quad \cot y=\sqrt{x^2-1}$$

$$1=-x\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u=f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}sen^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u=\frac{-1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}\csc^{-1}u=\frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$

Ejemplos.

Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) $y=sen^{-1}5x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5)=\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

2) $y=\cos^{-1}\frac{1}{3}x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{3\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}}$$

3) $y = \tan^{-1} 2x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(2x^3\right)^2}\left(6x^2\right) = \frac{6x^2}{1+4x^6}$$

4) $y = \cot^{-1} 10x^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\left(10x^4\right)^2}\left(40x^3\right) = \frac{-40x^3}{1+100x^8}$$

5) $y = 2\sec^{-1}\left(13x^2 - 12x + 1\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\left(13x^2 - 12x + 1\right)\sqrt{\left(13x^2 - 12x + 1\right)^2 - 1}}\left(26x - 12\right)$$

$$= \frac{52x - 24}{\left(13x^2 - 12x + 1\right)\sqrt{\left(13x^2 - 12x - 12\right)^2 - 1}}$$

6) $y = -9\csc^{-1}\left(14x^3 - 4x\right)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-9}{\left(14x^3 - 4x\right)\sqrt{\left(14x^3 - 4x\right)^2 - 1}}\left(42x^2 - 4\right)$$

$$= \frac{378x^2 - 36}{\left(14x^3 - 4x\right)\sqrt{\left(14x^3 - 4x\right)^2 - 1}}$$

7) $y = 4sen^{-1} 3x^5 \cdot \cos^{-1} 8x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4sen^{-1} 3x^5 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(8x^4\right)^2}}\left(32x^3\right) + \cos^{-1} 8x^4 \cdot \frac{4}{\sqrt{1-\left(3x^5\right)^2}}\left(15x^4\right)$$

$$= -4sen^{-1} 3x^5 \cdot \frac{32x^3}{\sqrt{1-64x^8}} + \cos^{-1} 8x^4 \cdot \frac{60x^4}{\sqrt{1-9x^{10}}}$$

8) $y = \dfrac{2\csc^{-1} 4x}{5\tan^{-1} 3x^7}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\tan^{-1} 3x^7 \cdot \dfrac{-2}{4x\sqrt{(4x)^2 - 1}}(4) - 2\csc^{-1} 4x \cdot \dfrac{5}{1+\left(3x^7\right)^2}\left(21x^6\right)}{\left(5\tan^{-1} 3x^7\right)^2}$$

$$= \frac{-\dfrac{10\tan^{-1} 3x^7}{x\sqrt{16x^2 - 1}} - \dfrac{210x^6 \csc^{-1} 4x}{1+9x^{14}}}{\left(5\tan^{-1} 3x^7\right)^2}$$

9) $y = \sec^{-1}\sec\left(5x^2 + 7x - 4\right)$

Por ser funciones inversas, se eliminan:

$$y = 5x^2 + 7x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 10x + 7$$

10) $y = \sqrt[6]{\cot^{-1} 2x^2}$

$$y = \left(\cot^{-1} 2x^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\left(\cot^{-1} 2x^2\right)^{-\frac{5}{6}} \cdot \frac{-1}{1+\left(2x^2\right)^2}(4x) = -\frac{4x}{6\sqrt[6]{\left(\cot^{-1} 2x^2\right)^5}\left(1+4x^4\right)}$$

III.13 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las reglas de derivación para las funciones exponenciales y logarítmicas se deducen a continuación:

1) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

Demostración:

1er paso: $f(x+\Delta x) = \log_a(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

2) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

para este caso: $a = e$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

3) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$

Demostración:

$y = a^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln a^x = x \ln a$

derivando con respecto a x:

$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \cdot \ln a$

4) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

Demostración:

$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \cdot \ln a$

para este caso: $a = e$

$f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x(1) = e^x$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u = f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u}\log_a e \cdot \frac{du}{dx} \qquad (a > 0,\, a \neq 1)$

2) $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln u \cdot \frac{du}{dx} \qquad (a > 0)$

4) $\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Derivar las siguientes funciones:

1) $y = \log_3\left(x^4 - 7x^2 - 16\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 14x}{x^4 - 7x^2 - 16}\log_3 e$

2) $y = \log_5\left(sen\,3x^4\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 \cos 3x^4}{sen\,3x^4}\log_5 e$

3) $y = \ln\left(2x^2 - x - 1\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x-1}{2x^2 - x - 1}$$

4) $y = \ln\cos 5x^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-20x^3\, sen 5x^4}{\cos 5x^4}$$

$$= -20x^3 \tan 5x^4$$

5) $y = 7^{5x}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(7^{5x}\ln(5x)\right)5$$

6) $y = 4^{\left(3x^2 - 9x - 1\right)}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(4^{\left(3x^2-9x-1\right)}\ln\left(3x^2 - 9x - 1\right)\right)(6x-9)$$

7) $y = e^{2x^5}$

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 e^{2x^5}$$

8) $y = e^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

9) $y = \log_2\left(3x^2 - 4x + 7\right)^5$

Aplicando la propiedad:

$\log_a x^n = n\log_a x$ se tiene:

$$y = 5\log_2\left(3x^2 - 4x + 7\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(6x-4)}{3x^2 - 4x + 7}\log_2 e$$

10) $y = \ln\left(6x^2 - 8x\right)\left(5x^3 - 2x^2\right)$

Aplicando la propiedad:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ se tiene:

$$y = \ln\left(6x^2 - 8x\right) + \ln\left(5x^3 - 2x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x-8}{6x^2 - 8x} + \frac{15x^2 - 4x}{5x^3 - 2x^2}$$

11) $y=\ln\frac{3^{8x^2}}{4e^{3x^5}}$

Aplicando la propiedad: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ se tiene:

$$y=\ln 3^{8x^2}-\ln 4e^{3x^5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(3^{8x^2}\ln 8x^2\right)16x}{3^{8x^2}}-\frac{4e^{3x^5}\left(15x^4\right)}{4e^{3x^5}}=16x\ln 8x^2+15x^4$$

12) $y=\ln\left(\frac{\left(\sqrt[5]{\log_4\left(6x^3\right)}\right)\cdot\cos^{-1}3x^6}{\left(4sen\,2x\right)^3}\right)$

Aplicando convenientemente las propiedades de logaritmos se tiene:

$$y=\ln\sqrt[5]{\log_4 6x^3}\cdot\cos^{-1}3x^6-\ln\left(4sen\,2x\right)^3$$

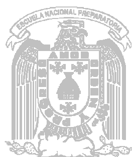
$$y=\ln\sqrt[5]{\log_4 6x^3}+\ln\cos^{-1}3x^6-3\ln 4sen\,2x$$

$$y=\ln\left(\log_4 6x^3\right)^{\frac{1}{5}}+\ln\cos^{-1}3x^6-3\ln 4sen\,2x$$

$$y=\frac{1}{5}\ln\left(\log_4 6x^3\right)+\ln\cos^{-1}3x^6-3\ln 4sen\,2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\frac{\frac{18x^2}{6x^3}\log_4 e}{\log_4 6x^3}+\frac{\frac{-18x^5}{\sqrt{1-\left(3x^6\right)^2}}}{\cos^{-1}3x^6}-\frac{24\cos 2x}{4sen\,2x}$$

$$=\frac{18\log_4 e}{30x\log_4 6x^3}-\frac{18x^5}{\left(\cos^{-1}3x^6\right)\sqrt{1-9x^{12}}}-6\cot 2x$$



APLICACIONES DE LA DERIVADA

UNIDAD IV

A través del uso del concepto de derivada se logra conocer algunas propiedades relevantes de las funciones. El estudio de estas características facilita la representación gráfica y la interpretación analítica de las mismas, lo que posibilita su mejor entendimiento. El objetivo de este capítulo es obtener información de las funciones a partir de su derivada y conocer más acerca de su comportamiento.

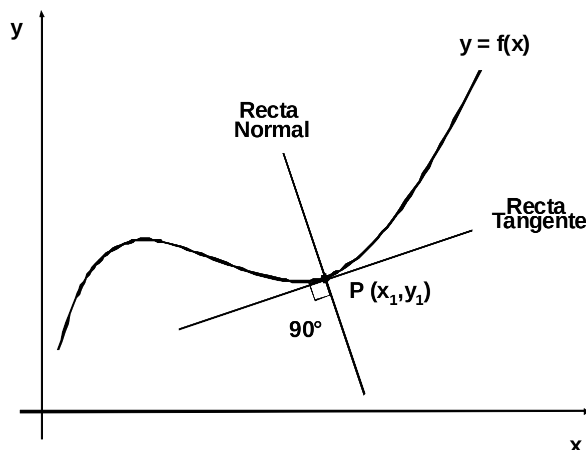
IV.1 RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL DE UNA CURVA

Si una función $y = f(x)$ posee una derivada en el punto x_1, la curva tiene una tangente en $P(x_1, y_1)$ cuya pendiente es: $m_1 = \tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = f'(x_1)$.

Se sabe que la ecuación de la recta que pasa por un punto y con una pendiente dada es: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por lo tanto, si se sustituye la pendiente por la derivada, la ecuación de la *recta tangente* en un punto de una curva es:

$$y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} (x - x_1)$$

Si $m = 0$ tiene tangente horizontal a la curva. Si $m = \infty$ tiene tangente vertical a la curva.



Una *recta normal* a una curva en uno de sus puntos es la recta que pasando por dicho punto es perpendicular a la recta tangente en él.

La condición de perpendicular entre dos rectas es: $m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}}$

La ecuación de la recta normal en el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = -\left.\frac{1}{m_1}\right|_{x=x_1} (x - x_1)$$

Ejemplos.
Hallar las ecuaciones de las recta tangente y normal de las siguientes curvas en el punto indicado.

1) $y = 3x^2 - 5x + 4$ $\qquad P(2,6)$
Solución:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = 6x - 5\Big|_{x=2} = 6(2) - 5 = 12 - 5 = 7$$

$y - 6 = 7(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 6 = 7x - 14 \quad \Rightarrow \quad 7x - y - 8 = 0$ (recta tangente).

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{7}$$

$$y - 6 = -\frac{1}{7}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 7(y - 6) = -(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 7y - 42 = -x + 2$$

$\Rightarrow \quad x + 7y - 44 = 0$ (recta normal).

2) $y = 9x^3 - 12x - 5$ $\qquad P(-1,-2)$
Solución:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = 27x^2 - 12\Big|_{x=-1} = 27(-1)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$$

$$y - (-2) = 15(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 15(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 15x + 15$$

$\Rightarrow \quad 15x - y + 13 = 0$ (recta tangente).

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{15}$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{15}(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad 15(y + 2) = -(x + 1) \quad \Rightarrow \quad 15y + 30 = -x - 1$$

$\Rightarrow \quad x + 15y + 31 = 0$ (recta normal).

3) $y = \frac{1}{x}$ $\qquad P\left(2, \frac{1}{2}\right)$
Solución:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = -\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 4\left(y - \frac{1}{2}\right) = -(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 4y - 2 = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad x + 4y - 4 = 0$$

(recta tangente).

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$$

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-\frac{1}{2}=4x-8 \quad \Rightarrow \quad 2y-1=8x-16$$

$\Rightarrow \quad 8x-2y-15=0$ (recta normal).

4) $-x^2y+6x-y^2x^2+4y-12=0 \qquad P(0,3)$

Solución:

$$m_1=\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{2xy-6+2xy^2}{-x^2-2x^2y+4}\Bigg|_{(0,3)}=\frac{2(0)(3)-6+2(0)(3)^2}{-(0)^2-2(0)^2(3)+4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-0) \quad \Rightarrow \quad 2(y-3)=-3x \quad \Rightarrow \quad 2y-6=-3x$$

$\Rightarrow \quad 3x+2y-6=0$ (recta tangente).

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-\frac{6}{4}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$y-3=\frac{2}{3}(x-0) \quad \Rightarrow \quad 3(y-3)=2x \quad \Rightarrow \quad 3y-9=2x \quad \Rightarrow \quad 2x-3y+9=0$ (recta normal).

5) $y=-7x^4+12x^2+4x \qquad P(1,9)$

Solución:

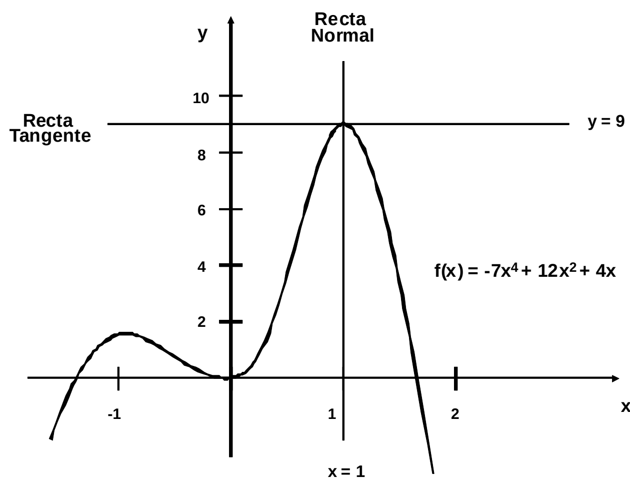
$$m_1=\frac{dy}{dx}=-28x^3+24x+4\Big|_{x=1}=-28(1)^3+24(1)+4=-28+24+4=0$$

$y-9=0(x-1) \quad \Rightarrow \quad y-9=0 \quad \Rightarrow \quad y=9$ (recta tangente).

$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{0}$ (pendiente de 90°, o sea, es infinita)

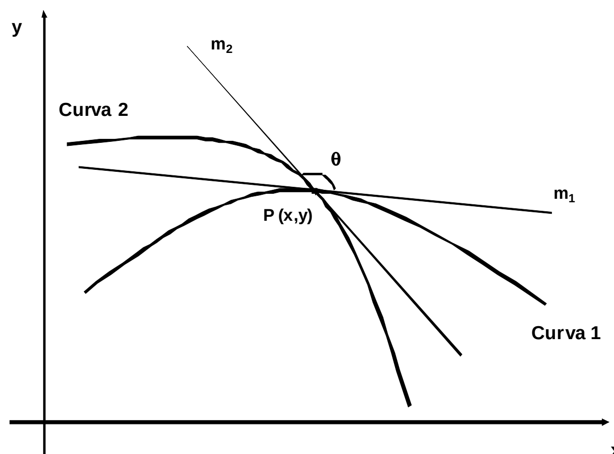
$y-9=-\frac{1}{0}(x-1) \quad \Rightarrow \quad 0(y-9)=-(x-1) \quad \Rightarrow \quad 0=-x+1 \quad \Rightarrow \quad x=1$ (recta normal).

Gráficamente, esto es:



IV.2 ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS

Dadas dos curvas cualesquiera, el ángulo de intersección entre ellas está dado por el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.



El procedimiento para obtener el ángulo de intersección entre dos curvas es el siguiente:

1. Se calculan las coordenadas de los puntos de intersección, resolviendo las ecuaciones formadas por las funciones.
2. Se derivan las ecuaciones para encontrar las pendientes de las tangentes de las curvas para cada uno de los puntos de intersección.
3. Se aplica la siguiente expresión:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

En caso de que se obtenga un ángulo agudo θ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $-\theta$.
En caso de que se obtenga un ángulo no agudo θ que sea positivo, el ángulo de intersección es: $180° - \theta$.
En caso de que se obtenga un ángulo no agudo θ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $180° + \theta$.

Nótese como:

- Si las pendientes son iguales, el ángulo de intersección es cero.
- Si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, el ángulo de intersección es de $90°$, es decir las curvas son ortogonales.

Ejemplos.
Obtener el ángulo de intersección entre las siguientes curvas:

1) $f(x) = 5x - 7$ y $g(x) = -3x + 9$
Solución:

Igualando las funciones: $5x - 7 = -3x + 9 \quad \Rightarrow \quad 8x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16}{8} = 2$

Derivando:
$$\frac{df(x)}{dx} = 5$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=-3$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1=\tan^{-1}\frac{5-(-3)}{1+(5)(-3)}=\tan^{-1}\frac{8}{-14}=\tan^{-1}(-0.5714)=-29.74°$$

$$\therefore \quad \theta_1=29.74°$$

2) $f(x)=-3x^2-10x-14$ y $g(x)=11x+16$

Solución:

Igualando las funciones: $-3x^2-10x-14=11x+16 \quad \Rightarrow \quad -3x^2-21x-30=0$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+21x+30=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+7x+10=0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x+2)=0$$

$$\therefore \quad x_1=-5; \quad x_2=-2$$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx}=-6x-10$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=11$$

Evaluando el punto $x_1=-5$:

$$m_1=-6x-10\big|_{x=-5}=-6(-5)-10=30-10=20$$

$$m_2=11\big|_{x=-5}=11$$

$$\therefore \quad \theta_1=\tan^{-1}\frac{20-11}{1+(20)(11)}=\tan^{-1}\frac{9}{221}=\tan^{-1}(0.0407)=2.33°$$

Evaluando el punto $x_1=-2$:

$$m_1=-6x-10\big|_{x=-2}=-6(-2)-10=12-10=2$$

$$m_2=11\big|_{x=-2}=11$$

$$\therefore \quad \theta_1=\tan^{-1}\frac{2-11}{1+(2)(11)}=\tan^{-1}\frac{-9}{23}=\tan^{-1}(-0.3913)=21.37°$$

3) $f(x)=x^2$ y $g(x)=(x-2)^2$

Solución:

Igualando las funciones: $x^2=(x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=x^2-4x+4 \quad \Rightarrow \quad 4x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{4}=1$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx}=2x$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=2(x-2)$$

Evaluando el punto $x=1$:

$$m_1=2x\big|_{x=1}=2(1)=2$$

$$m_2=2(x-2)\big|_{x=1}=2(1-2)=2(-1)=-2$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2-(-2)}{1+(2)(-2)} = \tan^{-1}\frac{4}{-3} = \tan^{-1}(-1.3333) = -53.13°$$

$\therefore \quad \theta = 53.13°$

4) $f(x) = 4x^2 + 5x - 7$ y $g(x) = -6x^2 - 2x + 5$

Solución:

Igualando las funciones:

$$4x^2 + 5x - 7 = -6x^2 - 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 7x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 10, \quad b = 7, \quad c = -12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(10)(-12)}}{2(10)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{20} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{20} = \frac{-7 \pm 23}{20}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-7+23}{20} = \frac{16}{20} = 0.8; \quad x_2 = \frac{-7-23}{20} = -\frac{30}{20} = -1.5$$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = 8x + 5$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = -12x - 2$$

Evaluando el punto $x_1 = 0.8$:

$$m_1 = 8x + 5\big|_{x=0.8} = 8(0.8) + 5 = 6.4 + 5 = 11.4$$

$$m_2 = -12x - 2\big|_{x=0.8} = -12(0.8) - 2 = -9.6 - 2 = -11.6$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{11.4-(-11.6)}{1+(11.4)(-11.6)} = \tan^{-1}\frac{23}{-131.24} = \tan^{-1}(-0.1752) = -9.94°$$

$\therefore \quad \theta_1 = 9.94°$

Evaluando el punto $x_2 = -1.5$:

$$m_1 = 8x + 5\big|_{x=-1.5} = 8(-1.5) + 5 = -12 + 5 = -7$$

$$m_2 = -12x - 2\big|_{x=-1.5} = -12(-1.5) - 2 = 18 - 2 = 16$$

$$\therefore \quad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{-7-16}{1+(-7)(16)} = \tan^{-1}\frac{-23}{-111} = \tan^{-1}(0.2072) = 11.70°$$

5) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ y $x^2 + y^2 - 8 = 0$

Solución:

Igualando las funciones: $x^2 + y^2 - 4x = x^2 + y^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad -4x = -8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-8}{-4} = 2$

obteniendo las ordenadas: $y = \pm\sqrt{8 - x^2} = \pm\sqrt{8 - 2^2} = \pm\sqrt{8-4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore \quad P_1(2,2); \quad P_2(2,-2)$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-2x+4}{2y}$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

Evaluando el punto $(2,2)$:

$$m_1 = \left.\frac{-2x+4}{2y}\right|_{(2,2)} = \frac{-2(2)+4}{2(2)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$m_2 = \left.\frac{-2x}{2y}\right|_{(2,2)} = \frac{-2(2)}{2(2)} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{0-(-1)}{1+0(-1)} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}(1) = 45°$$

Evaluando el punto $(2,-2)$:

$$m_1 = \left.\frac{-2x+4}{2y}\right|_{(2,-2)} = \frac{-2(2)+4}{2(-2)} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$m_2 = \left.\frac{-2x}{2y}\right|_{(2,-2)} = \frac{-2(2)}{2(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{0-1}{1+0(1)} = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = \tan^{-1}(-1) = -45°$$

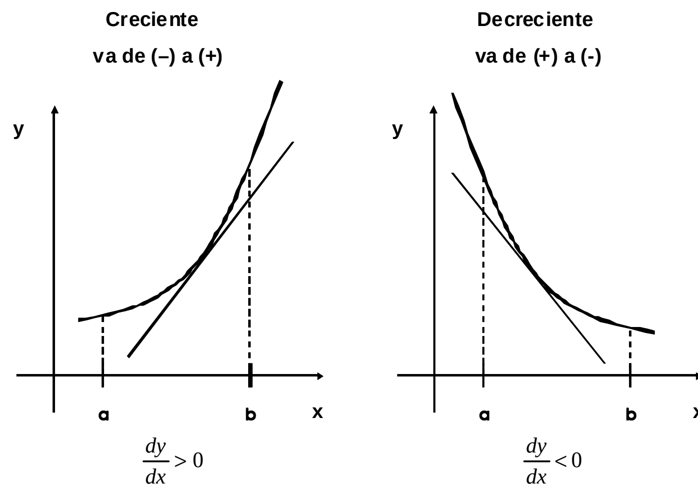
IV.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Función creciente

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo (a,b). Si se cumple que $\frac{dy}{dx} > 0$, la función es creciente.

Función decreciente

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo (a,b). Si se cumple que $\frac{dy}{dx} < 0$, la función es decreciente.



Criterio de la primera derivada

Si la derivada de una función es cero, se tiene un *punto critico* (PC) y existen dos casos:

1. Si pasa de signo (+) a (-), la función tiene un *máximo relativo*.
2. Si pasa de signo (-) a (+), la función tiene un *mínimo relativo*.

El máximo más grande se denomina *máximo absoluto*. El mínimo más pequeño se denomina *mínimo absoluto*.

Si $\frac{dy}{dx}$ no cambia de signo, la derivada no tiene ni máximo ni mínimo.

Criterio de la segunda derivada

- Si $\frac{dy}{dx}=0$ y $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, la función $y=f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto en cuestión.
- Si $\frac{dy}{dx}=0$ y $\frac{d^2y}{dx^2}>0$, la función $y=f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto en cuestión.

Concavidad

Un arco de curva $y=f(x)$ es *cóncavo*, si cada uno de sus puntos están situados por encima de la tangente. Como la pendiente aumenta: $\frac{d^2y}{dx^2}>0$

Convexidad

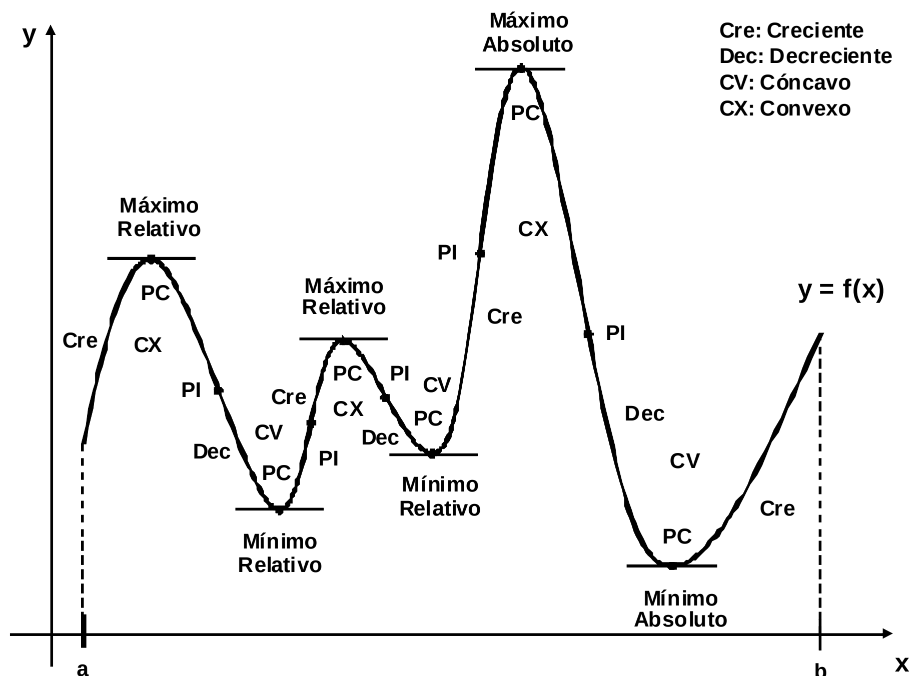
Un arco de curva $y=f(x)$ es *convexo*, si cada uno de sus puntos están situados por debajo de la tangente. Como la pendiente disminuye: $\frac{d^2y}{dx^2}<0$

Punto de inflexión (PI)

Es el punto en el cual la curva pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. Una curva tiene punto de inflexión en x_1 si:

i. $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_1}=0$

ii. $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_1}\neq 0$, es decir, que existe su tercera derivada.



Ejemplos.
Dadas las siguientes funciones obtener (en caso de aplicar):
a) puntos críticos, sus máximos y mínimos; b) ubicar donde son crecientes y donde decrecientes; c) determinar donde son cóncavas, donde convexas y establecer sus puntos de inflexión; d) trazar la gráfica en el intervalo dado.

1) $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ en el intervalo $0 \le x \le 5$
Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = -2x + 6$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$-2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$f(3) = -(3)^2 + 6(3) + 7 = -9 + 18 + 7 = 16$$

$$\therefore \quad PC(3,16)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$ por lo tanto es un máximo y su forma es convexa. Eso implica que en $0 \le x < 3$, la función es creciente y en $3 < x \le 5$ es decreciente.

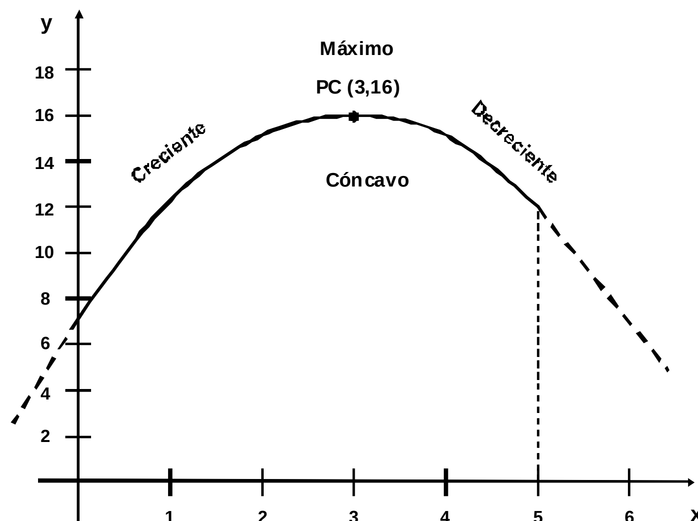
$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, por lo tanto, no existen puntos de inflexión.

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(0) = -(0)^2 + 6(0) + 7 = 0 + 0 + 7 = 7 \quad \Rightarrow \quad P(0,7)$$

$$f(5) = -(5)^2 + 6(5) + 7 = -25 + 30 + 7 = 12 \quad \Rightarrow \quad P(5,12)$$

Trazando la gráfica:



2) $f(x)=x^3-3x^2+4$ en el intervalo $-2\le x\le 4$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx}=3x^2-6x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$3x^2-6x=0 \quad\Rightarrow\quad x(3x-6)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0;\quad 3x-6=0 \quad\Rightarrow\quad 3x=6 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{6}{3}=2$$

$$f(0)=(0)^3-3(0)^2+4=0-0+4=4$$

$$\therefore\quad PC_1(0,4)$$

$$f(2)=(2)^3-3(2)^2+4=8-12+4=0$$

$$\therefore\quad PC_2(2,0)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-6$$

$$6x-6\big|_{x=0}=6(0)-6=-6<0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$$6x-6\big|_{x=2}=6(2)-6=12-6=6>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

Eso implica que en $-2\le x<0$, la función es creciente, en $0<x\le 2$ es decreciente y en $2<x\le 4$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$6x-6=0 \quad\Rightarrow\quad 6x=6 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{6}{6}=1$$

$f(1)=(1)^3-3(1)^2+4=1-3+4=2$

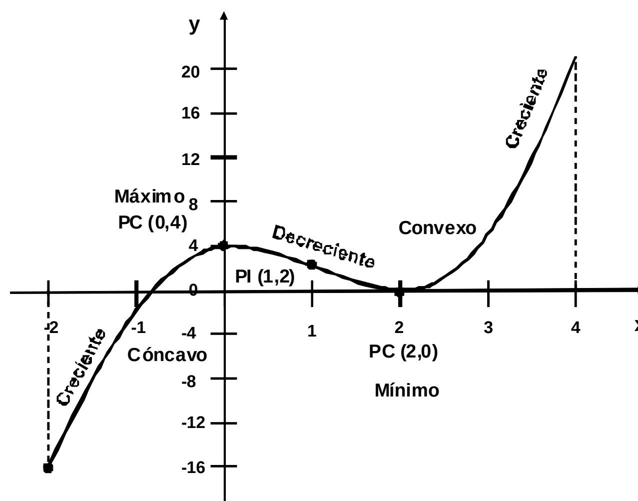
$\therefore \quad PI(1,2)$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2+4=-8-12+4=-16$

$f(4)=(4)^3-3(4)^2+4=64-48+4=20$

Trazando la gráfica:



3) $f(x)=x^4-2x^2+1$ en el intervalo $-1.5\le x\le 1.5$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx}=4x^3-4x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$4x^3-4x=0 \quad \Rightarrow \quad x(4x^2-4)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0; \quad 4x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{4}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{1}$$

$\therefore \quad x_2=1; \quad x_3=-1$

$f(0)=(0)^4-2(0)^2+1=0-0+1=1$

$\therefore \quad PC_1(0,1)$

$f(1)=(1)^4-2(1)^2+1=1-2+1=0$

$\therefore \quad PC_2(1,0)$

$f(-1)=(-1)^4-2(-1)^2+1=1-2+1=0$

$\therefore \quad PC_3(-1,0)$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-4$$

$$12x^2-4\Big|_{x=0}=12(0)^2-4=-4<0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$12x^2 - 4\Big|_{x=1} = 12(1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$12x^2 - 4\Big|_{x=-1} = 12(-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

Eso implica que en $-1.5 \leq x < -1$, la función es decreciente, en $-1 < x < 0$ es creciente, en $0 < x < 1$ es decreciente y en $1 < x \leq 1.5$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$12x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$x_2 = 0.5773; \quad x_3 = -0.5773$

$f(0.5773) = (0.5773)^4 - 2(0.5773)^2 + 1 = 0.1111 - 0.6666 + 1 = 0.4444$

$\therefore \quad PI_1(0.5773, 0.4444)$

$f(-0.5773) = (-0.5773)^4 - 2(-0.5773)^2 + 1 = 0.1111 - 0.6666 + 1 = 0.4444$

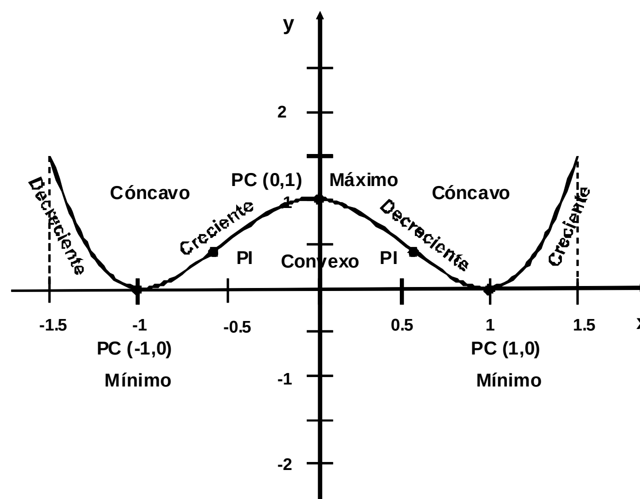
$\therefore \quad PI_2(-0.5773, 0.4444)$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-1.5) = (-1.5)^4 - 2(-1.5)^2 + 1 = 5.0625 - 4.5 + 1 = 1.5625$

$f(1.5) = (1.5)^4 - 2(1.5)^2 + 1 = 5.0625 - 4.5 + 1 = 1.5625$

Trazando la gráfica:



4) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 5$

Solución.

$\frac{df(x)}{dx} = -3x^2 + 12x - 9$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$-3x^2+12x-9=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-12x+9=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+3=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore \quad x_1=1; \quad x_2=3$

$f(1)=-(1)^3+6(1)^2-9(1)+8=-1+6-9+8=4$

$\therefore \quad PC_1(1,4)$

$f(3)=-(3)^3+6(3)^2-9(3)+8=-27+54-27+8=8$

$\therefore \quad PC_2(3,8)$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$\frac{d^2y}{dx^2}=-6x+12$

$-6x+12\big|_{x=1}=-6(1)+12=-6+12=6>0$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$-6x+12\big|_{x=3}=-6(3)+12=-18+12=-6\ >0$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

Eso implica que en $-1\le x<1$, la función es decreciente, en $1<x\le 3$ es creciente y en $3<x\le 5$ es decreciente.

$\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, por lo tanto, si existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$-6x+12=0 \quad \Rightarrow \quad -6x=-12 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-12}{-6}=2$

$f(2)=-(2)^3+6(2)^2-9(2)+8=-8+24-18+8=6$

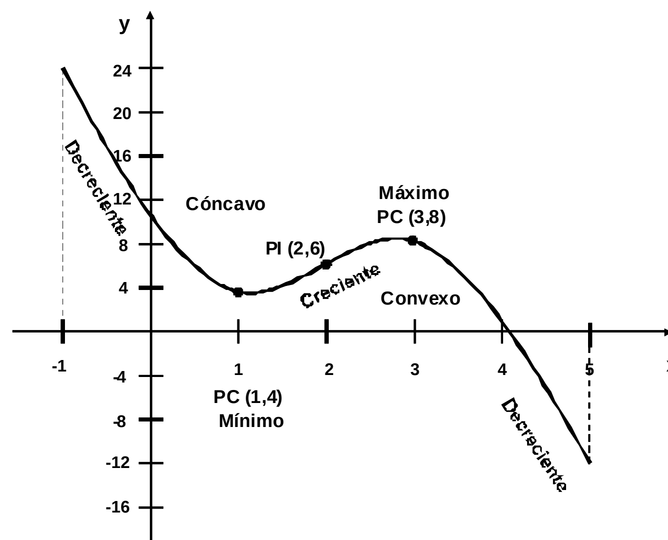
$\therefore \quad PI(2,6)$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-1)=-(-1)^3+6(-1)^2-9(-1)+8=1+6+9+8=24$

$f(5)=-(5)^3+6(5)^2-9(5)+8=-125+150-45+8=-12$

Trazando la gráfica:



5) $f(x) = x^3 + 3x$ en el intervalo $-3 \le x \le 3$
Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 3$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

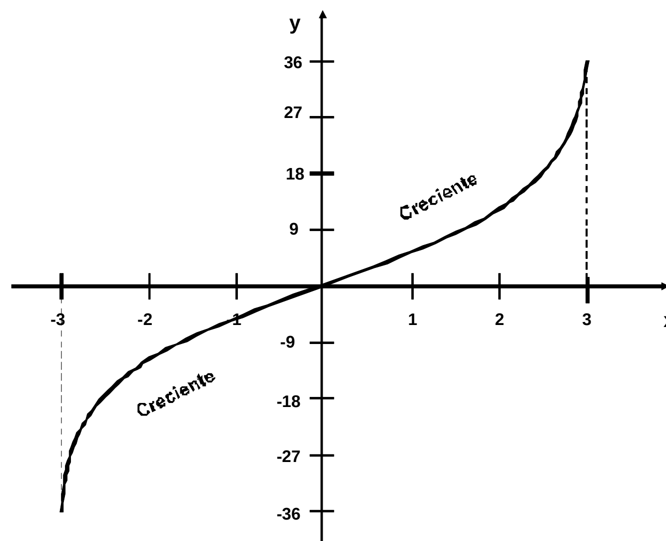
$$3x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{3}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

Como no está definido ese valor en los número reales, no se tienen puntos críticos. Eso significa que no hay ni máximos ni mínimos.
Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) = -27 - 9 = -36$$

$$f(3) = (3)^3 + 3(3) = 27 + 9 = 36$$

En la siguiente gráfica, se muestra que la función siempre es creciente:



IV.4 TEOREMA DE ROLLE

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las condiciones siguientes:

i. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$

ii. $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a,b)

iii. $f(a) = f(b)$

Por lo tanto existe, al menos un valor $x \in (a,b)$, para el cual $f'(x) = 0$

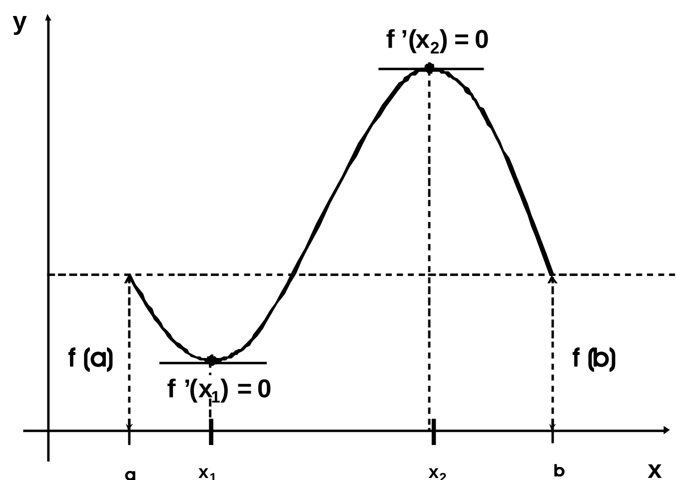
Demostración:

Existen tres casos:

1. Si $f(x) = 0$ en el intervalo (a,b), entonces $f'(x) = 0$, para todo x, y así x puede ser cualquier valor en (a,b).

2. Si $f(x)$ está por encima de $f(a)=f(b)$ en algún punto del intervalo (a,b), entonces en un punto x_2 la función pasa de ser creciente a decreciente. Por definición, el punto donde ocurre eso es un máximo, por lo tanto $f'(x_2)=0$, en dicho intervalo.
3. Si $f(x)$ está por debajo de $f(a)=f(b)$ en algún punto del intervalo (a,b), entonces en un punto x_1 la función pasa de ser decreciente a creciente. Por definición, el punto donde ocurre eso es un mínimo, por lo tanto $f'(x_1)=0$, en dicho intervalo.

Puesto que toda función debe estar en uno de estos tres casos, el teorema queda demostrado.



El teorema establece que por lo menos existe un punto de la gráfica de $y=f(x)$, en el intervalo (a,b) en donde se tiene pendiente cero (tangente paralela al eje x) si sus extremos son de igual altura, $(f(a)=f(b))$.

IV.5 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Si $y=f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), existe por lo menos un valor $x_1 \in (a,b)$ en que se cumple que:

$$f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Demostración:

La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

construyendo la función $F(x)$ pasando el término del segundo miembro al primero:

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

sustituyendo $x = a$ y después $x = b$, se tiene:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0$$

Se aprecia que $F(x)$ satisface todas las hipótesis del Teorema de Rolle. Por lo tanto debe existir un valor tal que $F'(x_1) = 0$.

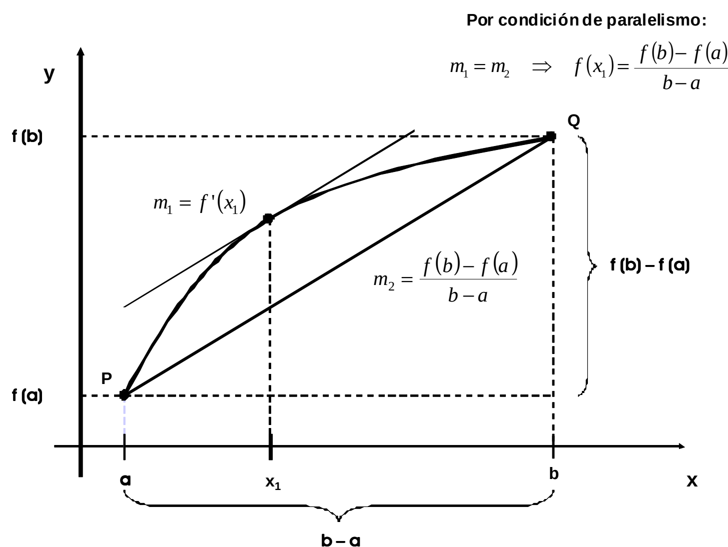
Ahora, derivando $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como $F'(x_1) = 0$, esto implica que:

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

por lo tanto el teorema queda demostrado.



El teorema establece que existe por lo menos un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva entre los puntos P y Q en la cual la recta tangente a dicha curva es paralela a la secante que pasa por dichos puntos

IV.6 APLICACIONES DE LA DERIVADA EN OTRAS DISCIPLINAS

Muchos de los aspectos de la vida diaria como los de las ciencias y las ingenierías tienen que ver con el cambio de las cosas y, en especial, con el cambio de una variable con relación a otras.

En el estudio del Cálculo Diferencial es primordial el concepto de variación o cambio continuo. En este sentido, la aplicación del concepto de derivada es interdisciplinaria, puesto que hay una gran cantidad de ámbitos en que se puede aplicar la razón de cambio instantánea de una variable con respecto a otra. Por ejemplo, la velocidad de un automóvil representa un cambio de su posición con respecto al tiempo.

A continuación se citan algunas aplicaciones de la derivada que constituyen valiosas herramientas en diversas disciplinas:

MECÁNICA

La velocidad de una partícula es la rapidez con que cambia de posición al transcurrir el tiempo. La *velocidad media* de una partícula que se mueve de una posición inicial x_1 en un instante t_1 a otra posición final x_2 en un instante t_2 viene dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

La velocidad media sólo describe la medida del desplazamiento neto y del tiempo transcurrido. No dice nada acerca de cómo fue el movimiento entre x_1 y x_2: si la trayectoria fue en curva o en recta, o si el movimiento fue continuo o si tuvo interrupciones. La velocidad media se refiere simplemente al desplazamiento total y al tiempo total transcurrido. Por ejemplo, si un automóvil se desplaza 50 kilómetros de una ciudad a otra en media hora, la velocidad media para el viaje fue de 100 kilómetros sobre hora, independientemente de que el velocímetro marcara diferentes velocidades a lo largo del trayecto.

Sin embargo, si una partícula se mueve de tal manera que su velocidad media en gran número de intervalos diferentes no es constante, se dice que la partícula se mueve con velocidad variable. Entonces, para determinar la velocidad de esa partícula en un instante dado se efectúa a partir del concepto de velocidad instantánea:

Si Δx es el desplazamiento en un pequeño intervalo de tiempo Δt, la velocidad en el tiempo t es el valor límite a que tiende $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, cuando Δt tiende a cero. Esto es, la *velocidad instantánea* es:

$v_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, pero, por definición de derivada, se tiene que:

$$v_i = \frac{dx}{dt}$$

Si la velocidad de una partícula cambia al efectuar un movimiento, entonces se dice que el cuerpo tiene una aceleración. La aceleración de una partícula es la rapidez con que cambia su velocidad al transcurrir el tiempo.

La *aceleración media* durante el movimiento de una partícula de un punto inicial con una velocidad v_1 en un instante t_1 a otra posición final con velocidad v_2 en un instante t_2 viene dada por:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

La aceleración media sólo describe la medida de la velocidad neta y del tiempo transcurrido. No dice nada acerca de cómo fue la variación con el tiempo que le ocurre a la velocidad durante el intervalo Δt. Sólo se conoce el cambio neto de velocidad y el tiempo total transcurrido. Si no hay cambio en la velocidad, la aceleración es cero.

Sin embargo, si una partícula se mueve de tal manera que su aceleración media en gran número de intervalos diferentes no es constante, se dice que la partícula se mueve con aceleración variable. Entonces, para determinar la aceleración de esa partícula en un instante dado se efectúa a partir del concepto de aceleración instantánea:

Si Δv es la velocidad en un pequeño intervalo de tiempo Δt, la aceleración en el tiempo t es el valor límite a que tiende $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, cuando Δt tiende a cero. Esto es, la *aceleración instantánea* es:

$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, pero por definición de derivada, se tiene que:

$$a_i = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo.
Sea la función $x(t) = t^3 - 3t^2 + 10t + 8$ que define la trayectoria, en metros, de una partícula. Si $t_1 = 5\ s$ y $t_2 = 8\ s$. Determinar: a) su posición para t_1, b) su posición para t_2, c) su velocidad media entre t_1 y t_2, d) la velocidad instantánea para $t = 6\ s$, e) la aceleración media entre t_1 y t_2, f) la aceleración instantánea para $t = 7\ s$.

Solución.
a) $x(5) = (5)^3 - 3(5)^2 + 10(5) + 8 = 125 - 75 + 50 + 8 = 108\ m$
b) $x(8) = (8)^3 - 3(8)^2 + 10(8) + 8 = 512 - 192 + 80 + 8 = 408\ m$
c) $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{408 - 108}{8 - 5} = \frac{300}{3} = 100\ \frac{m}{s}$
d) $v_i = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=6} = 3(6)^2 - 6(6) + 10 = 108 - 36 + 10 = 82\ \frac{m}{s}$
e) $v_1 = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=5} = 3(5)^2 - 6(5) + 10 = 75 - 30 + 10 = 55\ \frac{m}{s}$
$v_2 = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=8} = 3(8)^2 - 6(8) + 10 = 192 - 48 + 10 = 154\ \frac{m}{s}$
$\therefore \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{154 - 55}{8 - 5} = \frac{99}{3} = 33\ \frac{m}{s^2}$
f) $a_i = \frac{dv}{dt} = 6t - 6\Big|_{t=7} = 6(7) - 6 = 42 - 6 = 36\ \frac{m}{s^2}$

La *cantidad de movimiento* de una partícula se define como el producto de su masa y su velocidad:

$$p = m \cdot v$$

Newton expresó su segunda ley del movimiento en términos de la cantidad de movimiento así: la rapidez con la cual cambia la cantidad de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza resultante que se ejerce sobre el cuerpo. Matemáticamente esto es:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot v) = m\frac{dv}{dt} = m \cdot a$$

Esto significa que la *fuerza* es igual al producto de la masa por la aceleración. En el sistema internacional de unidades, la fuerza se mide en Newtons.

HIDROSTÁTICA

La *presión* P es la magnitud de la fuerza normal que se ejerce por unidad de área de la superficie de un fluido:

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

La presión se transmite a los límites de un fluido perpendicularmente y su unidad es el Pascal.

La variación de la presión respecto de la altura de un fluido en equilibrio estático viene dada por:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho \cdot g$$

Esto significa que conforme aumenta la altura (dy positivo), disminuye la presión (dP negativo).. La causa de esta variación de presión es el peso por unidad de área de sección transversal de las capas del fluido que están entre los puntos cuya diferencia de presión se mide.

La cantidad $\rho \cdot g$ se llama *peso específico* del fluido y representa su peso por unidad de volumen.

TERMODINÁMICA

La relación de la cantidad de calor ΔQ aplicada a un cuerpo con su correspondiente elevación de temperatura ΔT, se llama *capacidad calorífica* C del cuerpo, esto es:

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT}$$

La capacidad calorífica de un cuerpo por unidad de masa, que se conoce como *calor específico* c, es característica del material de que está compuesto el cuerpo:

$$c = \frac{Capacidad\ calorífica}{masa} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$$

La expresiones anteriores, reconocen que ni la capacidad calorífica de un cuerpo (medida en $\frac{J}{°K}$) ni el calor específico de un material (medido en $\frac{J}{kg°K}$) son constantes, ya que dependen de la situación del intervalo de temperaturas.

ELECTRICIDAD

Todo cuerpo con electrones capaces de moverse entre los átomos de la red cristalina del mismo se llama conductor. Una de las causas que origina este movimiento es la aplicación al conductor de una diferencia de potencial o voltaje.

Cuando de un punto a otro de un conductor se desplaza una o más cargas eléctricas se dice que circula por él una corriente eléctrica.

En general, la *intensidad de corriente instantánea* i en un circuito es la cantidad de carga que circula por unidad de tiempo. Esto es:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La corriente por un conductor se mide en Amperes.

ÓPTICA

Del flujo radiante, sólo una pequeña fracción se encuentra en el intervalo de longitudes de onda que evoca la sensación visual en el ojo humano[1].

La parte del flujo radiante que afecta al ojo se le conoce como flujo luminoso.

Cuando un flujo luminoso incide sobre una superficie, se dice que está iluminada. Se define como *iluminación* E al flujo luminoso incidente L por unidad de área:

$$E = \frac{dL}{dA}$$

La iluminación se expresa en Luxes.

QUÍMICA

Sea una reacción



$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C el producto.

La concentración de un reactivo A es el número de moles por litro y se denota por $[A]$. La concentración de un reactivo varía durante una reacción y depende del tiempo.

La *velocidad instantánea de reacción* VIR de concentración del producto $[C]$ está dada por:

$$VIR = \frac{d[C]}{dt}$$

La concentración del producto se incrementa en la medida que la reacción avanza, sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción, por lo tanto:

$$VIR = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

ya que $[A]$ y $[B]$ disminuyen con la misma rapidez con que crece $[C]$.

[1] El rango visual de longitud de onda está en el rango de $400\ m\mu$ a $700\ m\mu$.

BIOLOGÍA

Si n es el número de individuos de una población o colonia de seres vivos, la función $n = f(t)$ denota el comportamiento del crecimiento en función del tiempo. Para un periodo de tiempo, se define como la *tasa promedio de crecimiento* TPC, a la relación:

$$TPC = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

La *tasa instantánea de crecimiento* TIC, se obtiene si el periodo Δt tiende a cero

$$TIC = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Esta expresión mide la rapidez con que crece o disminuye una población de seres bajo observación, para un momento específico.

PSICOLOGÍA

En la teoría del aprendizaje, es muy útil determinar el rendimiento de una persona al paso del tiempo. Si $R = f(t)$ representa la función de rendimiento que presenta un individuo para adquirir un conocimiento o dominar una habilidad en un tiempo de capacitación t, entonces la expresión:

$$\frac{dR}{dt}$$

mide la razón de mejora del aprendizaje a medida que transcurre el tiempo. Esto es útil para identificar a personas con problemas y facilita la aplicación del tratamiento conducente.

ECONOMÍA

Sea $C = f(x)$ la función de costo que una compañía incurre al producir x unidades de un cierto artículo o proveer cierto servicio.

El *costo marginal* se define como la razón instantánea de cambio del costo respecto al número de artículos producidos o de bienes ofrecidos:

$$C_{mg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

El costo marginal representa el costo de producir un artículo adicional de las normalmente producidas.

Para fines prácticos, la función de costo se modela a través de una función polinomial de la forma:

$$C(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

donde el término a_0 representa los costos fijos (rentas de los bienes, mantenimientos, etc.) y los demás términos representan los costos variables (gasto en los insumos, sueldos de los trabajadores, etc.). Si se deriva esta función, se observa que el costo marginal sólo depende de los costos variables, es decir, la capacidad instalada no influye en el costo de incrementar la producción.

IV.7 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

En problemas de aplicación de derivadas, el objetivo es calcular la razón de cambio de las cantidades en términos de otra que puede medirse más fácilmente a través del establecimiento de una ecuación que relacione las dos cantidades involucradas mediante la aplicación de la regla de la cadena.

Para todo fin práctico, la metodología sugerida para resolver problemas es la siguiente:

1. Leer cuidadosamente el problema.
2. Esbozar un dibujo que refleje el contenido del problema.
3. Definir las variables y asignar la simbología.
4. Determinar las cantidades que tengan razones de variación, expresarlas en forma de derivadas e identificar la incógnita.
5. Establecer una ecuación que relacione todas las cantidades del problema aplicando los aspectos geométricos.
6. Aplicar la regla de la cadena.
7. Sustituir la información y resolver para la razón buscada.

Ejemplos.

1) A un globo esférico se le bombea aire de forma que su volumen aumenta a razón de $200\,\frac{cm^3}{s}$, ¿con qué rapidez crece el radio del globo cuando su diámetro es de $30\,cm$?

Solución.

Interpretando los datos: $\frac{dV}{dt}=200\,\frac{cm^3}{s}$, $D=30\,cm \quad \Rightarrow \quad r=15cm$

El volumen de un globo es: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Derivando: $\frac{dV}{dr}=\frac{12}{3}\pi r^2=4\pi r^2$

La razón buscada es: $\frac{dr}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

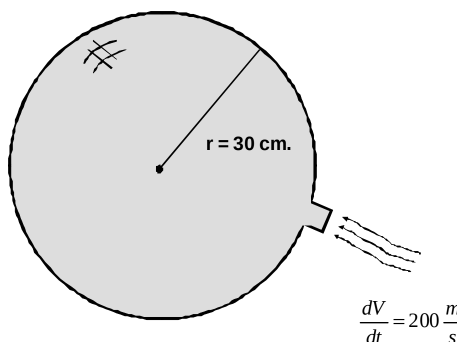
$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

Sustituyendo:

$$200\,\frac{cm^3}{s}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$$

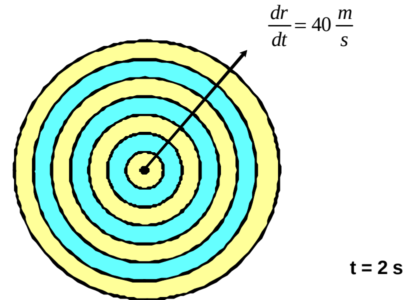
despejando $\frac{dr}{dt}$ y sustituyendo r:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{200\,\frac{cm^3}{s}}{4\pi(15\,cm)^2}=0.0707\,\frac{cm}{s}\,.$$



2) Se deja caer una piedra en un lago que crea una onda circular que se desplaza con una velocidad de $40\ \frac{cm}{s}$. Hallar la razón a la cual aumenta el área dentro del círculo después de 2 segundos.

Solución.



Interpretando los datos: $\frac{dr}{dt} = 40\ \frac{cm}{s}$, $t_1 = 2\ s$

El área de un circunferencia es: $A = \pi r^2$

Derivando: $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

La razón buscada es: $\frac{dA}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Para $t = 2\ s$:

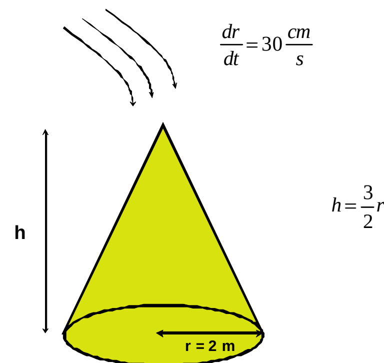
$$r = 40\ \frac{cm}{s}(2\ s) = 80\ cm$$

Sustituyendo:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(0.80\ m)\left(0.40\ \frac{m}{s}\right) = 2.0106\ \frac{m^2}{s}.$$

3) En una construcción, un camión vierte arena y se forma un montículo de forma cónica, cuya altura es igual a los $\frac{3}{2}$ del radio de la base. Obtener el incremento del volumen por unidad de tiempo cuando el radio de la base es igual a 2 metros, sabiendo que el radio se incrementa a razón de 30 centímetros. cada segundo.

Solución.



Interpretando los datos: $h = \frac{3}{2}r$,

$r_1 = 30$, $\frac{dr}{dt} = 30\ \frac{cm}{s}$

El volumen de un cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{3}{2}r\right) = \frac{1}{2}\pi r^3$$

Derivando: $\frac{dV}{dr} = \frac{3}{2}\pi r^2$

La razón buscada es: $\frac{dV}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

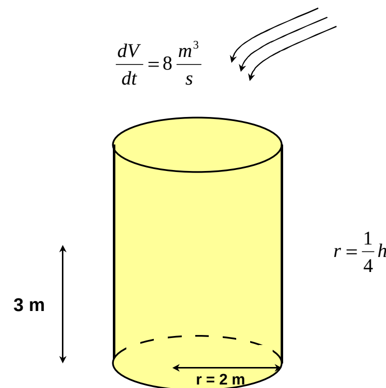
sustituyendo:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{3}{2}\pi(2)^2(0.30)=5.6548\ \frac{m^3}{s}$$

4) Se vierte gasolina en un tanque cilíndrico a razón de $8\frac{m}{s}$. Si el radio es la cuarta parte de la altura, ¿a qué velocidad sube el nivel de gasolina cuando $h=3\ m$?

Solución.

Interpretando los datos: $\frac{dV}{dt}=8\ \frac{m}{s}$, $r=\frac{h}{4}$, $h=3\ m$



El volumen de un cilindro es:

$$V=\pi r^2h=\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2h=\frac{1}{16}\pi h^3$$

Derivando: $\frac{dV}{dh}=\frac{3}{16}\pi h^2$

La razón buscada es: $\frac{dh}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

despejando $\frac{dh}{dt}$ y sustituyendo:

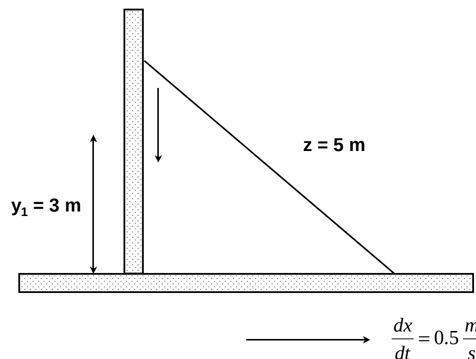
$$\frac{dh}{dt}=\frac{8}{\frac{3}{16}\pi(3)^2}=1.5090\ \frac{m}{s}$$

5) Una escalera de 5 metros de largo está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de 0.5 $\frac{m}{s}$, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo su extremo superior cuando este extremo está a 3 metros de la pared?

Solución.

Interpretando los datos: $z=5\ m$,

$\frac{dx}{dt}=0.5\ \frac{cm}{s}$, $y_1=3$



La razón buscada es: $\frac{dy}{dt}$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2+y^2=5^2$$

Derivando con respecto a t:

$$2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(25)=0$$

Despejando $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2x\cdot\frac{dx}{dt}}{2y}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}=$$

Obteniendo x cuando $y_1=3$

$$x=\sqrt{25-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4\ m$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{4}{3}(0.5)=-0.66\ \frac{m}{s}$$

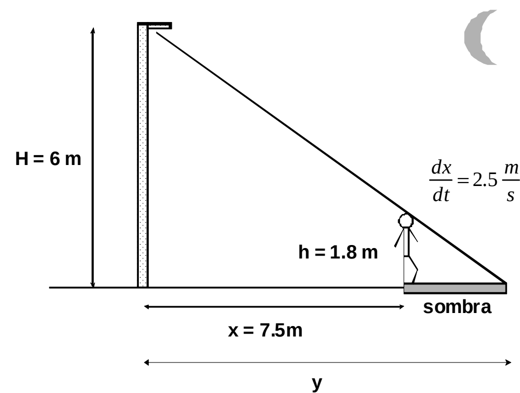
el signo negativo significa que la escalera pierde altura.

6) Una persona de 1.8 metros de estatura camina en la noche en línea recta a una velocidad de 2.5 $\frac{m}{s}$. Si pasa a junto a un arbotante de 6 metros de altura, obtener la velocidad del extremo de la sombra que se genera sobre la calle después de 3 segundos.

Solución.

Interpretando los datos:

$$\frac{dx}{dt}=2.5\ \frac{m}{s},\quad H=6\ m,\quad h=1.8\ m,\quad t=3\ s$$



$$x=2.5\ \frac{m}{s}(3\ s)=7.5\ m$$

La razón buscada es: $\frac{dy}{dt}$

Aplicando el concepto de semejanza de triángulos:

$$\frac{H}{y}=\frac{h}{y-x}$$

Despejando y:

$$y-x=\frac{h}{H}y\quad\Rightarrow\quad y-\frac{h}{H}y=x\quad\Rightarrow\quad y\left(1-\frac{h}{H}\right)=x\quad\Rightarrow\quad y=\frac{x}{1-\frac{h}{H}}$$

Derivando con respecto a t:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}}{1-\frac{h}{H}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{7.5\ m}{1-\frac{1.8\ m}{6\ m}}=10.71\frac{m}{s}$$

IV.8 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Una de las aplicaciones con mayor trascendencia del Cálculo Diferencial son aquellos problemas de optimización, cuyo objetivo es determinar los mejores resultados posibles.

A través de las derivadas se pueden resolver de manera sencilla y rápida muchos problemas que se presentan tanto en Matemáticas como en otras disciplinas científicas. Para optimizar una función, se deben encontrar sus valores *máximos* y *mínimos* y darles su apropiada interpretación. Por ejemplo se busca minimizar los costos de una producción determinada; encontrar la forma adecuada para comercializar un producto, etc.

La metodología para resolver problemas de aplicación es la siguiente:

1. Leer cuidadosamente el problema
2. Cuando sea conveniente, hacer un dibujo
3. Identificar con letras cada una de las cantidades que intervienen
4. Seleccionar la variable que se debe optimizar y expresarla en función de otras variables
5. Eliminar todas las variables exceptuando una, para poder obtener una función en una sola variable.
6. Derivar para obtener la cantidad optimizada
7. Sustituir ese valor para encontrar las demás cantidades buscadas.

Ejemplos.

1) Encontrar dos números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.
Solución:
Sea x un número y $20-x$ el otro.

$$P = x(20-x) = 20x - x^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 20 - 2x$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2$$ (por lo tanto, es máximo)

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = -20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-20}{-2} = 10$$

$$20 - x = 20 - 10 = 10$$

Los números buscados son $10 \ y \ 10$.

2) Hallar dos números diferentes cuyo producto sea 16 y la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima.
Solución.

$$xy = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{x}$$

$$S = x + y^2 = x + \left(\frac{16}{x}\right)^2 = x + \frac{256}{x^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{512}{x^3}$$

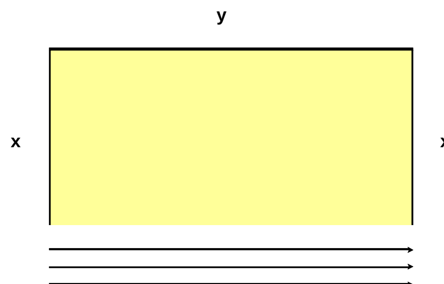
$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1536}{x^4}$$ (por lo tanto, es mínimo)

$$\frac{dS}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{512}{x^3}=0 \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{512}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x^3=512 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[3]{512}=8$$

$$y=\frac{16}{x}=\frac{16}{8}=2$$

Los números buscados son $8\ y\ 2$.

3) Una persona posee 2400 metros de malla y desea cercar un terreno rectangular que está sobre un río. Si no necesita cercar al río, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que posee el área más grande para así optimizar su malla?
Solución.



$$Área=xy$$

$$Longitud=2x+y=2400$$

$$y=2400-2x$$

$$A=x(2400-2x)=2400x-2x^2$$

$$\frac{dA}{dx}=2400-4x$$

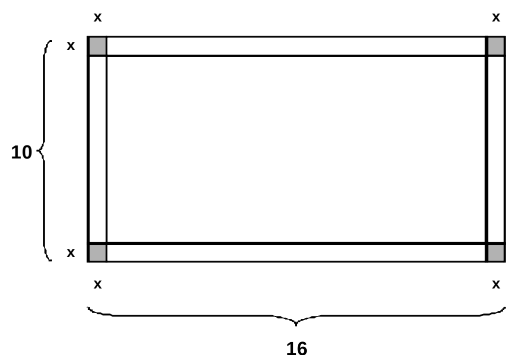
$$\frac{d^2A}{dx^2}=-4 \quad \text{(por lo tanto, es máximo)}$$

$$\frac{dA}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad 2400-4x=0 \quad \Rightarrow \quad -4x=-2400 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-2400}{-4}=600$$

$$y=2400-2x=2400-2(600)=2400-1200=1200$$

Las dimensiones de la malla deben ser: $600\ m$ de profundidad y $1200\ m$ de ancho.

4) Se desea construir una caja rectangular de cartón sin tapa. Si a un cartón de 10 x 16 cm se le hace una corte cuadrado en cada esquina y se doblan los bordes por las líneas punteadas. Cuál debe se el tamaño de los cuadrados recortados para maximizar el volumen?
Solución.



La longitud de la base es: $16-2x$
La anchura de la base es: $10-2x$
La altura de la caja es: x

$$Volumen=(16-2x)(10-2x)x$$

$$=(160-32x-20x+4x^2)x$$

$$=160x-32x^2-20x^2+4x^3$$

$$V=4x^3-52x^2+160x$$

$$\frac{dV}{dx}=12x^2-104x+160$$

$$\frac{dV}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2-104x+160=0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-(-104)\pm\sqrt{104^2-4(12)(160)}}{2(12)}=\frac{104\pm 56}{24}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{160}{24}=6.66; \quad x_2=\frac{48}{24}=2$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 104$$

$$24x - 104\Big|_{x=6.66} = 24(6.66) - 104 = 160 - 104 = 56 > 0$$

por lo tanto es un mínimo.

$$24x - 104\Big|_{x=2} = 24(2) - 104 = 48 - 104 = -56 < 0$$

por lo tanto es un máximo.

Se toma el valor que es máximo, es decir, los cuadrados recortados para maximizar el volumen deben medir $2\ cm$.

5) Se desea producir una lata que contenga un litro de leche. Determinar las dimensiones que minimizan el costo del metal para fabricar la lata.

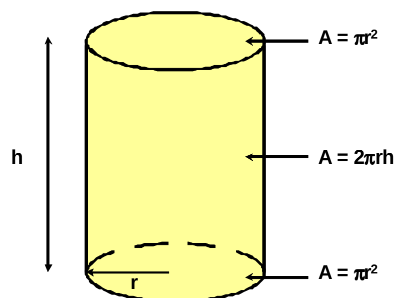
Solución.

El área total de la lata es igual a la suma de las áreas de la base, la tapa y los lados:

$$Área = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$Volumen = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$



sustituyendo en el área:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^3 - 2000 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2000}{4\pi}} = 5.41\ cm$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(5.41)^2} = 10.82\ cm$$

$$4\pi + \frac{4000}{r^3}\Bigg|_{x=5.41} = 4\pi + \frac{4000}{5.41^3} = 12.56 + 25.13 = 37.69 > 0$$ (por lo tanto, es mínimo)

La lata debe tener: $5.41\ cm$ de radio y $10.82\ cm$ de altura (es decir $2r$).

6) Cuando un avión que viene del puerto de Veracruz desplazándose a velocidad constante de $950\ \frac{km}{hr}$ y está a $250\ km$ de la ciudad de México, otro avión sale de la ciudad de México rumbo a Acapulco con velocidad constante de $600\ \frac{km}{hr}$. Si las trayectorias son perpendiculares, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima.

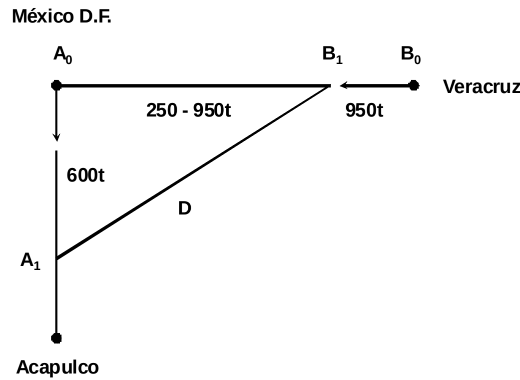
Solución.

La posición del avión que viene de Veracruz en el instante inicial es A_0

La posición del avión que va a Acapulco en el instante inicial es B_0

La posición del avión que viene de Veracruz t horas más tarde es A_1

La posición del avión que va a Acapulco t horas más tarde es B_1



Aplicando el teorema de Pitágoras y sabiendo que $distancia = velocidad \cdot tiempo$, la distancia D entre los aviones es:

$$D^2 = (600t)^2 + (250 - 950t)^2$$

derivando implícitamente con respecto a t:

$$2D\frac{dD}{dt} = 2(600t)600 + 2(250 - 950t)(-950) = 720{,}000t - 475{,}000 + 1'805{,}000t$$

$$2D\frac{dD}{dt} = 2'525{,}000t - 475{,}000$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dD}{dt} = \frac{2'525{,}000t - 475{,}000}{2D} = \frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D}$$

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1'262{,}500t - 237{,}500 = 0$$

$$t = \frac{237{,}500}{1'262{,}500} = 0.188\ hrs \approx 11.28 \min$$

$$\left.\frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D}\right|_{t=0} = \frac{1'262{,}500(0) - 237{,}500}{D} = -\frac{237{,}500}{D}$$

$$\left.\frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D}\right|_{t=1} = \frac{1'262{,}500(1) - 237{,}500}{D} = \frac{1'025{,}000}{D}$$

como D siempre es positiva, la función pasa de decreciente a creciente, por lo tanto es un mínimo.
El tiempo que transcurre para que la distancia sea mínima es de aproximadamente $11 \min$.
sustituyendo:

$$D^2 = (600(0.188))^2 + (250 - 950(0.188))^2 = 12{,}723.84 + 5{,}097.96 = 17{,}821.80$$

$$D = \sqrt{17{,}821.80} = 133.49\ km.$$

IV.9 FORMAS INDETERMINADAS

Si en el proceso de calcular el límite de un cociente de funciones del tipo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se presentan los siguientes casos:

- si $\lim_{x\to a} f(x) \to 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) \to 0$, se tiene una *forma indeterminada* del tipo: $\frac{0}{0}$
- si $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) \to \infty$, se tiene una *forma indeterminada* del tipo: $\frac{\infty}{\infty}$

Para resolver el límite se puede efectuar mediante el siguiente procedimiento:

REGLA DE L'HOPITAL

La regla de L'Hopital establece que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas:

- Forma $\frac{0}{0}$:

Sea $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Forma $\frac{\infty}{\infty}$:

Sea $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

La regla de L'Hopital debe aplicarse tantas veces como sea necesario, hasta que se elimine la indeterminación.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hopital:

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

sustituyendo:

$$\frac{(2)^2 + 2 - 6}{(2)^2 - 4} = \frac{4 + 2 - 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + x - 6)}{\frac{d}{dx}(x^2 - 4)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{2(2)+1}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

2) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2 + 8x + 3}{x^2 + 7}$

sustituyendo:

$$\frac{5(\infty)^2 + 8(\infty) + 3}{(\infty)^2 + 7} = \frac{\infty + \infty + 3}{\infty + 7} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(5x^2+8x+3\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2+7\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+8}{2x}=\frac{10(\infty)+8}{2(\infty)}=\frac{\infty+8}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(10x+8)}{\frac{d}{dx}(2x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{2}=5$$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$

sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2)^3-(2)^2-(2)-2}{(2)^3-3(2)^2+3(2)-2}=\frac{8-4-2-2}{8-12+6-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3-x^2-x-2\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^3-3x^2+3x-2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$$

$$=\frac{3(2)^2-2(2)-1}{3(2)^2-6(2)+3}=\frac{12-4-1}{12-12+3}=\frac{7}{3}$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$

sustituyendo:

$$\frac{sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(sen\,x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{x+sen\,3x}{x-sen\,3x}$

sustituyendo:

$$\frac{0+sen\,3(0)}{0-sen\,3(0)}=\frac{0+0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+sen\,3x}{x-sen\,3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x+sen\,3x)}{\frac{d}{dx}(x-sen\,3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3\cos 3x}{1-3\cos 3x}=\frac{1+3(1)}{1-3(1)}=\frac{1+3}{1-3}=\frac{4}{-2}=-2$$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

sustituyendo:

$$\frac{\ln(1)}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

7) $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}$

sustituyendo:

$$\frac{\ln(\infty)}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}$

sustituyendo:

$$\frac{3^4-81}{3^2-9}=\frac{81-81}{9-9}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{d}{dx}(x^4-81)}{\frac{d}{dx}(x^2-9)}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{2x}=\frac{4(3)^3}{2(3)}=\frac{4(27)}{6}=\frac{108}{6}=18$$

9) $\lim_{x\to \infty}x^2e^{-x^2}$

el limite puede rescribirse como:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}$$

sustituyendo:

$$\frac{\infty^2}{e^{(\infty)^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)}=\lim_{x\to \infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}}=\frac{2(\infty)}{2(\infty)e^{(\infty)^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}\left(2xe^{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x\left(2xe^{x^2}\right)+e^{x^2}(2)}=\frac{2}{2(\infty)\left(2(\infty)e^{(\infty)^2}\right)+e^{(\infty)^2}(2)}=\frac{2}{\infty+\infty}=0$$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

sustituyendo:

$$\frac{\tan(0)-0}{0^3}=\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\tan x-x)}{\frac{d}{dx}\left(x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sec^2 x-1\right)}{\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\cdot\tan x}{6x}=\frac{2(1)^2(0)}{6(0)}=\frac{0}{0}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(2\sec^2 x\cdot\tan x\right)}{\frac{d}{dx}(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\cdot\sec^2 x+\tan x\left(4\sec^2 x\cdot\tan x\right)}{6}$$

$$=\frac{2(1)^2(1)^2+0(4(1)(1))}{6}=\frac{2+0}{6}=\frac{2}{6}$$

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}$

sustituyendo:

$$\frac{5e^{4(\infty)}}{4(\infty)^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(5e^{4x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(4x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{20e^{4x}}{8x}=\frac{20e^{4(\infty)}}{8(\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(20e^{4x}\right)}{\frac{d}{dx}(8x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{80e^{4x}}{8}=\frac{80e^{4(\infty)}}{8}=\frac{\infty}{8}=\infty$$

en este ejemplo se demuestra que no todos los límites existen a pesar de la aplicación de esta regla.

12) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

sustituyendo: $\frac{\ln(\infty)}{\frac{1}{\infty}}=\frac{\infty}{0}$. No aplica la regla de L'Hopital.

IV.10 DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL

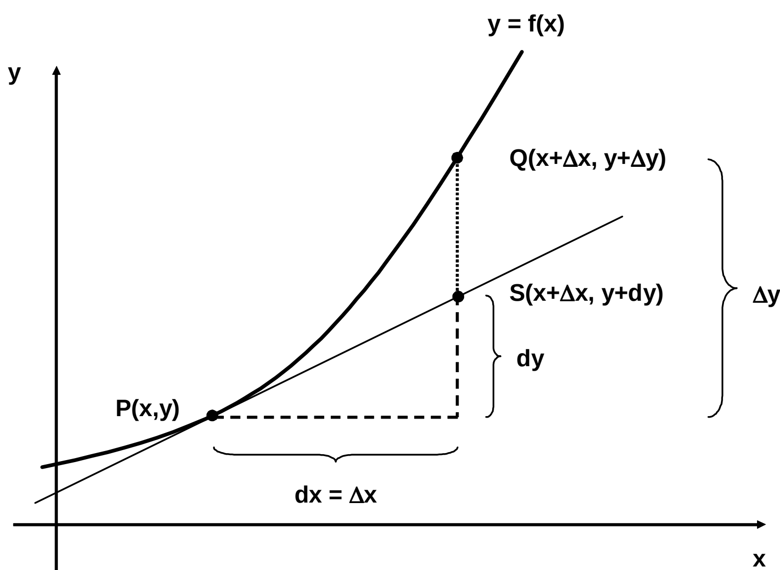
Sea una función $y=f(x)$.

Se define como la *diferencial de la variable independiente* a: $dx=\Delta x$
Se define como la *diferencial de la variable dependiente* a: $dy=f'(x)\cdot dx$

Esto significa que la diferencial de la variable x es por definición igual al incremento que experimenta, sin embargo, la diferencial de la variable y no es igual su incremento:

$$dx=\Delta x$$
$$dy\neq\Delta y$$

Sea una función $y=f(x)$. Dado un punto P de abscisa x, si se le dota de un incremento Δx, se tendrá otro punto Q de abscisa $x+\Delta x$. Ahora, si se traza la tangente a la curva en el punto $P(x,y)$, y desde $x+\Delta x$ se levanta una paralela al eje de ordenadas hasta cortar a la curva y a la tangente, se aprecia claramente como la diferencial dy y el incremento Δy no son iguales.

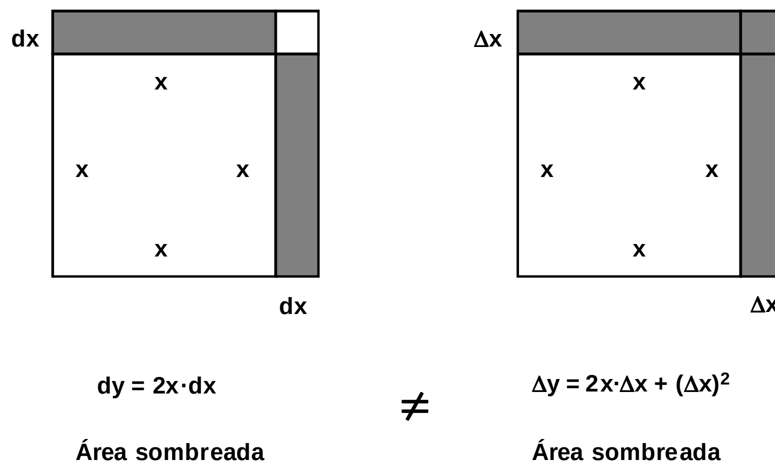


Ejemplo.

Obtener la diferencial dy de la función $y = 4x^2 - 6x + 5$.
Solución:
$dy = (8x - 6)dx$

Ejemplo.
Sea $y = x^2$, comprobar que $dy \neq \Delta y$.

Solución:
Obteniendo la diferencial de y: $dy = 2x \cdot dx$
Obteniendo el incremento de y: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$
Comparando ambos resultados, se observa como $dy \neq \Delta y$.
Si se traza una figura, lo anterior se comprueba:



IV.11 PROPIEDADES DE LA DIFERENCIAL

1) La diferencial de una función en un punto depende de dos variables: el punto x elegido y el incremento Δx que se ha tomado.

2) Al ser $dy = f'(x) \cdot dx$, la diferencial de una función en un punto es el incremento de la ordenada de la tangente al aumentar en Δx un punto de abscisa x.

3) Si se considera la función $y = f(x)$, se tiene que: $dy = f'(x) \cdot dx$, y pasando dx al primer miembro:
$\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Por lo tanto, se puede establecer que la *derivada* es un *cociente de diferenciales*: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

4) Puesto que $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, de la noción de límite se deduce que cuando Δx es infinitamente pequeño, el cociente $\frac{dy}{dx}$ es prácticamente igual a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, y puesto que $dx=\Delta x$, dy es prácticamente igual a $f(x+\Delta x)-f(x)$, es decir, que $dy\approx\Delta y$. Esta propiedad permite sustituir dy por Δy cuando Δx es muy pequeño, con la seguridad de que el error cometido será mínimo.

IV.12 CÁLCULO DE DIFERENCIALES

Para efectuar el cálculo de la diferencial general dy de una función $y=f(x)$, basta con aplicar las fórmulas de derivación y después multiplicar el resultado por dx.

Ejemplos.
Obtener la diferencial dy de las siguientes funciones:

1) $y=-4x^3+10x^2-5x+7$

$dy=\left(-12x^2+20x-5\right)dx$

2) $y=\frac{9}{x^3}$

$y=9x^{-3}$

$dy=-27x^{-4}\,dx=-\frac{27}{x^4}dx$

3) $y=\sqrt[4]{\left(8x^3\right)^7}$

$y=\left(8x^3\right)^{\frac{7}{4}}$

$dy=\frac{7}{4}\left(8x^3\right)^{\frac{3}{4}}\left(24x^2\right)dx=42x^2\sqrt[4]{8x^3}\,dx$

4) $y=4sen5x^3$

$dy=4\left(15x^2\right)\cos 5x^3\,dx=60x^2\cos 5x^3\,dx$

5) $y=6x^2e^{4x}$

$dy=\left(6x^2\left(4e^{4x}\right)+e^{4x}\left(12x\right)\right)dx$

6) $y=7\cos^{-1}9x$

$dy=-\frac{7(9)}{\sqrt{1-(9x)^2}}dx=-\frac{63}{\sqrt{1-81x^2}}dx$

7) $y=\ln\left(12x^5\right)^8$

$y=8\ln 12x^5$

$dy=\frac{8\left(60x^4\right)}{12x^5}dx=\frac{40}{x}dx$

8) $y=\frac{6}{\sqrt{11x^4}}$

$y=6\left(11x^4\right)^{-\frac{1}{2}}$

$dy=-\frac{6}{2}\left(11x^4\right)^{-\frac{3}{2}}\left(44x^3\right)dx=-\frac{132x^3}{\sqrt{\left(11x^4\right)^3}}dx$

9) $y=5x\tan\left(\tan^{-1}4x\right)$

$y=5x(4x)=20x^2$

$dy=40x\,dx$

10) $y=2\csc^5 4x^3$

$dy=-2\left(12x^2\right)\left(5\csc^4 4x^3\right)\csc 4x^3\cot 4x^3\,dx=-120x^2\csc^5 4x^3\cot 4x^3\,dx$

11) $y=\frac{5x^3+8x^2-2}{-x^4-6x}$

$dy=\frac{\left(-x^4-6x\right)\left(15x^2+16x\right)-\left(5x^3+8x^2-2\right)\left(-4x^3-6\right)}{\left(-x^4-6x\right)^2}dx$

12) $7xy+6x-2y^2-5y^6+4x^3-18=0$

$dy=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx=\frac{-7y-6-12x^2}{7x-4y-30y^5}dx$

13) $y=\frac{8}{9-2x^3}$

$y=8\left(9-2x^3\right)^{-1}$

$dy=-8\left(9-2x^3\right)^{-2}\left(-6x^2\right)dx=\frac{48x^2}{\left(9-2x^3\right)^2}dx$

14) $y=\log_5\left(13x^3-2\right)$

$dy=\frac{5\left(39x^2\right)}{\left(13x^3-2\right)}\log_5 e\,dx=\frac{195}{13x^3-2}\log_5 e\,dx$

15) $y=7^{9x^2}$

$dy=(18x)7^{9x^2}\ln 9x^2dx$

Ejemplo.

Obtener d^4y de la función $y=\frac{1}{x}$

Considerando que $y=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$, se aplica de forma reiterada:

$dy=-\frac{2}{x^2}dx$; $d^2y=\frac{4}{x^3}dx^2$; $d^3y=-\frac{12}{x^4}dx^3$; $d^4y=\frac{48}{x^5}dx^4$

Ejemplo.
Obtener $d^5 y$ de la función $y = sen\,2x$

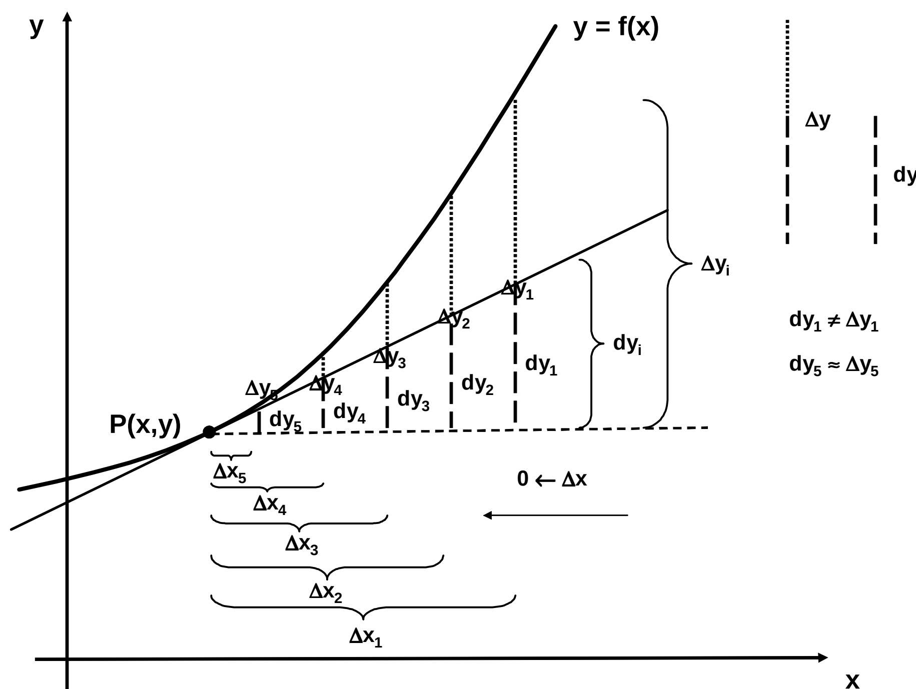
$dy = 2\cos 2x\,dx$; $d^2 y = -4sen\,2x\,dx^2$; $d^3 y = -8\cos 2x\,dx^3$;
$d^4 y = 16sen\,2x\,dx^4$; $d^5 y = 32\cos 2x\,dx^5$

IV.13 CÁLCULO APROXIMADO DE INCREMENTOS POR MEDIO DE LA DIFERENCIAL

Se sabe que $dx = \Delta x$. Si ésta es muy pequeña, el valor Δy se aproxima a dy , esto es:

$$dy \approx \Delta x$$

gráficamente esto es:



Para conocer el grado de desviación que existe entre el valor de Δy y el de dy , se aplica el concepto de porcentaje de error $(\%\,e)$, dado por:

$$\%\,e = \left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| \cdot 100$$

y este porcentaje se interpreta de acuerdo al siguiente criterio:

- Si $e < 3\,\%$ el error es muy aceptable
- Si $3\,\% \le e < 5\,\%$ el error es medianamente aceptable
- Si $e \ge 5\,\%$ el error es inaceptable.

El $\% e$ entonces depende plenamente del valor de Δx, ya que cuanto menor sea, mejor será la aproximación.

Ejemplos.
Dadas las siguientes funciones, obtener $\Delta x, dx, \Delta y, dy$ y el $\% e$, si x se modifica de acuerdo a los valores indicados:

1) $y = x^2 - 3x - 2$, si x pasa de 1 a 1.1
Solución:
$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.1 - 1 = 0.1$
$dx = \Delta x = 0.1$
$\Delta y = y_2 - y_1 = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - 2 - (x^2 - 3x - 2)$
$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 2 - x^2 + 3x + 2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x$
Sustituyendo $x = 1, \Delta x = 0.1$:
$\Delta y = 2(1)(0.1) + (0.1)^2 - 3(0.1) = 0.2 + 0.01 - 0.3 = -0.09$
Ahora, diferenciando la función: $dy = (2x - 3)dx$
Sustituyendo $x = 1, dx = 0.1$:
$dy = (2(1) - 3)(0.1) = -0.1$
Calculando el error:
$$\% e = \left| \frac{-0.09 - (-0.1)}{-0.09} \right| \cdot 100 = 11.11\% > 5\%$$
error que se considera alto.

2) $y = 4x^2 - 2x$, si x pasa de: a) 2 a 2.5, b) 2 a 2.1, c) 2 a 2.01
Solución:
a) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.5 - 2 = 0.5$
$dx = \Delta x = 0.5$
$\Delta y = y_2 - y_1 = 4(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - (4x^2 - 2x)$
$= 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 4x^2 + 2x = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x$
Sustituyendo $x = 2, \Delta x = 0.5$:
$\Delta y = 8(2)(0.5) + 4(0.5)^2 - 2(0.5) = 8 + 1 - 1 = 8$
Ahora, diferenciando la función: $dy = (8x - 2)dx$
Sustituyendo $x = 2, dx = 0.5$:
$dy = (8(2) - 2)(0.5) = 7$
Calculando el error:
$$\% e = \left| \frac{8 - 7}{8} \right| \cdot 100 = 12.5\,\% > 5\%$$
error que se considera alto.

b) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.1 - 2 = 0.1$
$dx = \Delta x = 0.1$
$\Delta y = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x$

Sustituyendo $x = 2,\ \Delta x = 0.1$:

$$\Delta y = 8(2)(0.1) + 4(0.1)^2 - 2(0.1) = 1.6 + 0.04 - 0.2 = 1.44$$
$$dy = (8x - 2)dx$$

Sustituyendo $x = 2,\ dx = 0.1$:

$$dy = (8(2) - 2)(0.1) = 1.4$$

Calculando el error:

$$\%\, e = \left| \frac{1.44 - 1.4}{1.44} \right| \cdot 100 = 2.77\,\% < 3\%$$

error que se considera muy aceptable.

c) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.01 - 2 = 0.01$

$$dx = \Delta x = 0.01$$
$$\Delta y = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x$$

Sustituyendo $x = 2,\ \Delta x = 0.01$:

$$\Delta y = 8(2)(0.01) + 4(0.01)^2 - 2(0.01) = 0.16 + 0.0004 - 0.02 = 0.1404$$
$$dy = (8x - 2)dx$$

Sustituyendo $x = 2,\ dx = 0.01$:

$$dy = (8(2) - 2)(0.01) = 0.14$$

Calculando el error:

$$\%\, e = \left| \frac{0.1404 - 0.14}{0.1404} \right| \cdot 100 = 0.284\,\% < 3\%$$

error que se considera muy aceptable.

IV.14 APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Son muchos los campos del conocimiento en que una diferencial puede tener aplicación. En general, se utiliza para hacer cálculos aproximados del comportamiento de funciones en intervalos pequeños.

En la disciplina que se quiera, siempre que un fenómeno abstracto, físico o social pueda ser modelado por funciones, es posible efectuar aproximaciones numéricas.

Para simplificar el procedimiento, se establece en seguida la metodología para obtener el cálculo aproximado de valores requeridos.

1) El dato se toma como valor final de la variable independiente.
2) El valor más cercano conocido, se toma como el valor inicial de la variable independiente.
3) Se encuentra Δx.
4) Se modela el dato como función de x.
5) Se obtiene la diferencial de la función respecto a x.
6) Siempre que $\Delta x \approx 0$, se reemplaza dy por Δy.
7) Se despeja el valor x_1 y se sustituyen los valores para encontrar el valor buscado.

Ejemplos.
Aplicando el concepto de diferencial, hacer el cálculo aproximado de los siguientes valores:

1) $\sqrt{26}$
Solución:
Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1 = \sqrt{25} = 5\right)$ y como x_2 al valor pedido:
$\therefore \quad x_1 = 25,\ x_2 = 26$
$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 26 - 25 = 1$
se modela el valor como función: $y = \sqrt{x}$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

sustituyendo: $dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}(1) = \frac{1}{10} = 0.1$
Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$
$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 5 + 0.1 = 5.1$
Por tanto, se puede concluir que $\sqrt{26} \cong 5.1$

2) $\sqrt[3]{66}$
Solución:
Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1 = \sqrt[3]{64} = 4\right)$ y como x_2 al valor pedido:
$\therefore \quad x_1 = 64,\ x_2 = 66$
$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 66 - 64 = 2$
se modela el valor como función: $y = \sqrt[3]{x}$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

sustituyendo: $dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}(2) = \frac{2}{48} = 0.041666$
Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$
$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 4 + 0.041666 = 4.041666$
Por tanto, se puede concluir que $\sqrt[3]{66} \cong 4.041666$

3) $\sqrt[5]{31}$
Solución:
Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1 = \sqrt[5]{32} = 2\right)$ y como x_2 al valor pedido:
$\therefore \quad x_1 = 32,\ x_2 = 31$
$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 31 - 32 = -1$
se modela el valor como función: $y = \sqrt[5]{x}$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{5\sqrt[3]{x^4}}dx$$

sustituyendo: $dy = \frac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}}(-1) = -\frac{1}{80} = -0.0125$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 2 + (-0.0125) = 1.9875$

Por tanto, se puede concluir que $\sqrt[5]{31} \cong 1.9875$

4) 3.05^2

Solución:

Se elige el valor x_1 del cuadrado más cercano $\left(y_1 = 3^2 = 9\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 3,\ x_2 = 3.05$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 3.05 - 3 = 0.05$

se modela el valor como función: $y = x^2$

$\therefore \quad dy = 2x\,dx$

sustituyendo: $dy = 2(3)(0.05) = 0.3$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 9 + 0.3 = 9.3$

Por tanto, se puede concluir que $3.05^2 \cong 9.3$

5) 10.2^3

Solución:

Se elige el valor x_1 del cubo más cercano $\left(y_1 = 10^3 = 1000\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 10,\ x_2 = 10.2$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 10.2 - 10 = 0.2$

se modela el valor como función: $y = x^3$

$\therefore \quad dy = 3x^2\,dx$

sustituyendo: $dy = 3(10)^2(0.2) = 60$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1000 + 60 = 1060$

Por tanto, se puede concluir que $10.2^3 \cong 1060$

6) $\log_{10} 10{,}007$

Solución:

Se elige el valor x_1 del logaritmo más cercano $\left(y_1 = \log_{10} 10{,}000 = 4\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 10{,}000,\ x_2 = 10{,}007$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 10{,}007 - 10{,}000 = 7$

se modela el valor como función: $y = \log_{10} x$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{x}\log_{10} e\,dx$$

sustituyendo: $dy = \dfrac{1}{10{,}000}(0.434294)(7) = 0.000304$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 4 + 0.000304 = 4.000304$

Por tanto, se puede concluir que $\log_{10} 10{,}007 \cong 4.000304$

7) $\ln 2.7$

Solución:

Se elige el valor x_1 del logaritmo natural más cercano $(y_1 = \ln e = 1)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = e = 2.718281,\ x_2 = 2.7$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 2.7 - 2.718281 = -0.018281$

se modela el valor como función: $y = \ln x$

$\therefore \quad dy = \frac{1}{x} dx$

sustituyendo: $dy = \frac{1}{e}(-0.018281) = -0.006725$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1 - 0.006725 = 0.993274$

Por tanto, se puede concluir que $\ln 2.7 \cong 0.993274$

Para encontrar valores aproximados de funciones trigonométricas, conviene recordar la siguiente tabla:

	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	No definido	1	No definido
30°	0.5	0.8660	0.5773	1.7320	1.1547	2
45°	0.7071	0.7071	1	1	1.4142	1.4142
60°	0.8660	0.5	1.7320	0.5773	2	1.1547
90°	1	0	No definido	0	No definido	1

8) $\cos 62°$

Solución:

Se elige como x_1 al valor del coseno más cercano $(y_1 = \cos 60° = 0.5)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 60°,\ x_2 = 62°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 62° - 60° = 2°$

transformando a radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \rightarrow 2\pi\ rad \\ 2° \rightarrow \Delta x\ rad \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi\ rad)(2°)}{360°} = 0.034906\, rad$$

se modela el valor como función: $y = \cos x$

$\therefore \quad dy = -sen\, x\, dx$

sustituyendo: $dy = -0.8660(0.034906) = -0.030228$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 0.5 + (-0.030228) = 0.469771$

Por tanto, se puede concluir que $\cos 62° \cong 0.469771$

9) $sen 3°$

Solución:

Se elige como x_1 al valor del seno más cercano $(y_1 = sen\, 0° = 0)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 0°,\ x_2 = 3°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 3° - 0° = 3°$
transformando a radianes:

$$\left.\begin{matrix} 360° \rightarrow 2\pi\ rad \\ 3° \rightarrow \Delta x\ rad \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi\ rad)(3°)}{360°} = 0.052359\,rad$$

se modela el valor como función: $y = sen\,x \quad \therefore \quad dy = \cos x\,dx$
sustituyendo: $dy = 1(0.052359) = 0.052359$
Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$
$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 0 + (0.052359) = 0.052359$
Por tanto, se puede concluir que $sen 3° \cong 0.052359$

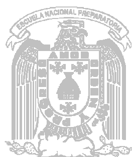
10) $\tan 44°$
Solución:
Se elige como x_1 al valor de la tangente más cercana $(y_1 = \tan 45° = 1)$ y como x_2 al valor pedido:
$\therefore \quad x_1 = 45°,\ x_2 = 44°$
$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 44° - 45° = -1°$
transformando a radianes:

$$\left.\begin{matrix} 360° \rightarrow 2\pi\ rad \\ -1° \rightarrow \Delta x\ rad \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi\ rad)(-1°)}{360°} = -0.017453\,rad$$

se modela el valor como función: $y = \tan x$
$\therefore \quad dy = \sec^2 x\,dx$
sustituyendo: $dy = (1.4142)^2(-0.017453) = -0.034906$
Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$
$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1 + (-0.034906) = 0.965094$
Por tanto, se puede concluir que $\tan 44° \cong 0.965094$

Ejemplo.
Un móvil se mueve según la función $s = 5t^2 + t$, donde s representa la distancia recorrida medida en metros y t el tiempo medido en segundos. Determinar el desplazamiento que experimenta el móvil en el tiempo comprendido entre 7 segundos y $\left(7 + \frac{1}{3}\right)$ segundos.

Solución:
$t_1 = 7,\ t_2 = 7.333333$
$\Rightarrow \quad \Delta t = dt = t_2 - t_1 = 7.333333 - 7 = 0.333333\ s$
diferenciando la función: $ds = (10t + 1)dt$
sustituyendo: $ds = (10(7) + 1)(0.333333) = 23.666666\ m$
en realidad recorre algo más de esa distancia, ya que:
$s = 5(7.333333)^2 + 7.333333 - (5(7^2) + 7) = 24.222222\ m$
por lo que se ha cometido un error de 0.555 centímetros.



LA INTEGRAL

UNIDAD V

V.1 SUCESIONES

V.1.1 DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

Una *sucesión* es una lista de números que siguen una regla determinada:

$$\{ a_n \} = \{ a_1, a_2, a_3, \cdots a_i, \cdots, a_n \}$$

Formalmente, las sucesiones se definen como un tipo especial de función de n cuyo dominio es el conjunto de números naturales **N**:

$$\{ a_n \} : N \rightarrow R$$

Ejemplos de sucesiones:

1) $\{ a_n \} = \{ 5, 10, 15, 20, 25, \cdots \}$
2) $\{ a_n \} = \{ 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, \cdots \}$
3) $\{ a_n \} = \{ 1, 2, 4, 8, 16, \cdots \}$
4) $\{ a_n \} = \{ 3, -3, 3, -3, 3, \cdots \}$

El término i-ésimo a_i de una sucesión es el que va acompañado de la letra que indica el valor del número en determinado término. Por ejemplo, en la primera sucesión el primer término (a_1) es 5, el segundo término (a_2) es 10, el tercer término (a_3), es 10. El término enésimo o general es a_n.

Ejemplo.
En la sucesión: $\{ a_n \} = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots \right\}$, el término enésimo o general es: $a_n = \left\{ \frac{n}{2} \right\}$.

Para conocer los términos de una sucesión, se sustituye el valor de n desde 1 hasta el valor que se desee.

Ejemplos.
Determinar los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones:

1) $a_n = \left\{ \frac{2^n}{2n-1} \right\}$

el primer término es: $\frac{2^1}{2(1)-1} = 2$

el segundo término es: $\frac{2^2}{2(2)-1} = \frac{4}{3}$

el tercer término es: $\frac{2^3}{2(3)-1}=\frac{8}{5}$

el cuarto término es: $\frac{2^4}{2(4)-1}=\frac{16}{7}$

el quinto término es: $\frac{2^5}{2(5)-1}=\frac{32}{9}$

Por lo tanto: $\{\,a_n\}=\left\{\,2,\frac{4}{3},\frac{8}{5},\frac{16}{7},\frac{32}{9},\cdots\right\}$

2) $a_n=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

el primer término es: $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

el segundo término es: $\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$

el tercer término es: $\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$

el cuarto término es: $\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$

el quinto término es: $\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}$

Por lo tanto: $\{\,a_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\cdots\right\}$

Como se puede ver, cuando se tiene el término general es muy sencillo obtener un término determinado. Sin embargo, el caso inverso que es, dados unos pocos términos, obtener el término general, no siempre resulta fácil.

Para establecer el término general que rige a la sucesión, primero se debe analizar el comportamiento de sus componentes[1].

Ejemplos.
Obtener el término general de las siguientes sucesiones:

1) $\{\,a_n\}=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$
Se aprecia que se compone por números impares, por lo que se deduce que el término general de esta sucesión es $a_n=\{2n-1\}$.

2) $\{\,a_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\cdots\right\}$

[1] Para determinar el término enésimo de una sucesión es necesario conocer como mínimo cinco de sus términos.

Nótese como el denominador de cada componente es igual al numerador más uno, por lo que se conluye que el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$.

3) $\{ a_n \} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \cdots \right\}$

Se advierte que el denominador de cada término crece de la forma 3^n, por lo que se deduce que el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}$.

4) $\{ a_n \} = \left\{ 0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \cdots \right\}$

Analizando los numeradores, se deduce que están dados por el cuadrado de cada número natural menos uno. Similarmente, los denominadores están dados por el cuadrado de ese mismo número natural pero más la unidad. Por lo tanto, el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1} \right\}$.

Existen dos casos especiales de sucesiones que destacan por su importancia:

- Se define como progresión aritmética, a la sucesión que posee la propiedad de que la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre constante. Esto es, existe un número d, llamado la diferencia común, tal que $d = a_{n+1} - a_n$ para todo n.

Ejemplos.

$\{ a_n \} = \{ 1, 4, 7, 10, 13, \cdots \}$ $d = 3$
$\{ a_n \} = \{ 10, 6, 2, -2, -6, \cdots \}$ $d = -4$

- Se define como progresión geométrica, a la sucesión en la que existe un número r llamado la razón común, con la propiedad de: $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para todo n.

Ejemplos.

$\{ a_n \} = \{ 2, 10, 50, 250, 1250, \cdots \}$ $r = 5$
$\{ a_n \} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \cdots \right\}$ $r = \frac{1}{2}$

V.1.2 TIPOS DE SUCESIONES

- Una sucesión es *infinita* cuando tiene un número infinito de términos.

Ejemplo: $\{ a_n \} = \{ 1, 6, 11, 16, 21, \cdots \}$

- Una sucesión es *finita* cuando tiene un número determinado de términos.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$

- Una sucesión que se aproxima cada vez más a un cierto número, se llama convergente.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$ (se acerca a cero)

- Una sucesión que no tiene límite es *divergente*.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \cdots\}$ (no se acerca a ningún número)

- Una sucesión es *creciente* si cada término de la sucesión es mayor que el anterior.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\}$

- Una sucesión es *decreciente* si cada término de la sucesión es menor que el anterior.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{1, -1, -3, -5, -7, \cdots\}$

- Una sucesión es *monótona* si es creciente o decreciente.

Ejemplos:
Monótona creciente: $\{a_n\} = \{8, 16, 24, 32, 40, \cdots\}$
Monótona decreciente: $\{a_n\} = \left\{\sqrt{25}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{25}, \sqrt[5]{25}, \sqrt[6]{25}, \cdots\right\}$

- Una sucesión se dice *acotada superiormente* por un número A, si $A \geq a_n$.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \cdots\right\}$ (está acotada por $A = 1$, ya que $1 \geq a_n$).

- Una sucesión se dice *acotada inferiormente* por un número A, si $A \leq a_n$.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{\frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{9}, \frac{3}{10}, \cdots\right\}$ (está acotada por $A = 0$, ya que $0 \leq a_n$).

- Una sucesión se dice *acotada* si está acotada superior e inferiormente.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\right\}$ (está acotada ya que $0 \leq a_n < 1$).

V.1.3 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Encontrar el límite de una sucesión es un problema que consiste en determinar a qué número, si es que existe, se aproximan sus términos.

Por ejemplo, en la sucesión $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$, cuyo término general, evidentemente es $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ al aumentar n, a_i está cada vez más próximo a cero.

Esto es: $a_{10} = \frac{1}{10} = 0.1$; $a_{100} = \frac{1}{100} = 0.01$; $a_{10000} = \frac{1}{10000} = 0.0001$.
A pesar de que ningún término de la sucesión llega a valer cero, el límite es cero.

Formalmente, Se dice que un número L es el límite de una sucesión, de término general a_n, si la diferencia en valor absoluto entre a_n y L es menor que un número cualquiera, ε, previamente elegido. Expresado matemáticamente esto es: $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

Existen propiedades conocidas de límites de sucesiones:

1. Toda sucesión acotada y monótona es convergente.
2. El límite de una sucesión cuyo término general es k^n es ∞.
3. El límite de una sucesión cuyo término general es $\frac{1}{k^n}$ es 0
4. El límite de una sucesión cuyo término general es n^k es 0, donde $0 < n < 1$
5. El límite de una sucesión cuyo término general es n^k es ∞, donde $n > 1$
6. El límite de una sucesión cuyo término general es un polinomio siempre es divergente. Su limite es $+\infty$, cuando el coeficiente del termino de mayor grado es positivo, y $-\infty$, cuando es negativo.
7. El límite de una suma o diferencia de sucesiones es respectivamente la suma o diferencia de los límites de cada una de ellas.
8. El límite de un producto o cociente de sucesiones es el producto o cociente de los límites de cada una de ellas.
9. Cualquier progresión aritmética es divergente.

Algunas veces, al calcular el límite de una sucesión se obtiene una indeterminación $\left(\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}, 0(\infty), 0^0, \infty^0\right)$. En este caso se tienen que efectuar operaciones que no alteren la expresión a fin de deshacer (en su caso) la indeterminación.

Ejemplos.
Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

1) $\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{25}{8}, \frac{49}{16}, \frac{97}{32}, \cdots \right\}$
Solución.
El término general es $a_n = \left\{ 3 + \frac{1}{2^n} \right\}$, lo que implica que cada número es cada vez más parecido a 3, por lo que ese es el límite de la sucesión.

2) $\left\{ a_n \right\} = \left\{ -4, -8, -12, -16, -20, \cdots \right\}$
Solución.
El término general es $a_n = \left\{ -4n \right\}$, lo que significa que la sucesión es decreciente y no acotada, así que el límite de la sucesión es $-\infty$, es decir, es divergente.

3) $a_n = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$
Solución.

Expresando sus términos: $\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots \right\}$. Se observa como el cociente tiende a la unidad, por lo que el límite de la sucesión es 1.

4) $a_n = \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}$

Solución.

Expresando sus términos: $\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \cdots \right\}$. Se puede advertir como los números son cada vez más pequeños, por lo tanto, el límite de la sucesión es 0.

5) $\left\{ a_n \right\} = \left\{ 2, 5, 8, 11, 14, \cdots \right\}$

Solución.

Como el término general es $a_n = \left\{ -1 + 3n \right\}$, la sucesión es creciente y no acotada, por lo que el límite de la sucesión es ∞, es decir, es divergente.

6) $a_n = \left\{ (-2)^n \right\}$

Solución.

Expresando sus términos: $\left\{ a_n \right\} = \left\{ -2, 4, -8, 16, -32, 64, \cdots \right\}$. Se aprecia claramente como el signo de los números son alternados (sucesión oscilante), por lo tanto, la sucesión es divergente y su límite no existe.

V.2 SERIES

V.2.1 DEFINICIÓN DE SERIE

Una serie es la suma de los elementos de una sucesión. La suma puede ser finita o infinita. Los elementos de las series pueden ser números, letras o una combinación de ambas. Una serie puede representarse de dos formas:

- Enlistando los elementos con los signos entre los elementos.
- Usando la llamada notación sigma (Σ), que implica la sumatoria de todos los elementos, con sólo el término general y el rango de la suma indicada.

Ejemplo.

Las siguientes expresiones representan la misma serie:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$$

$$s_n = \sum_{n=1}^{10} (-1)^{n+1}\, n$$

Se define como *serie infinita* a la suma de los términos de la sucesión:

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots + a_n + \cdots$$

en términos prácticos, se denota como $s_n = \sum a_n$.

Una serie *finita* se define como: $s_n = \sum_{n=1}^{i} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i$

Ejemplos.

1) Dada la sucesión infinita: $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots \right\}$

$$s_n = \sum a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

2) Dada la sucesión finita: $a_n = \{ -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20 \}$

$$s_n = \sum_{n=1}^{8} a_n = (-15) + (-10) + (-5) + 0 + 5 + 10 + 15 + 20$$

Ejemplos.
Determinar la suma aproximada de las siguientes sucesiones:

1) $s_n = \sum a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$

$\therefore \quad s_n = \sum a_n \cong 0.33333 + 0.11111 + 0.03703 + 0.01234 + .00411 \cong 0.49794$

2) $s_n = \sum a_n = (-6) + (-2) + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$

$\therefore \quad s_n = \sum a_n = 48$

De forma similar que en las sucesiones, las principales áreas de interés de las series son:

i. La determinación del término general de las series.
ii. Obtener, si existe, la suma de la serie.

VI.2.2 CONVERGENCIA DE UNA SERIE

En general, una serie:

- Es *convergente*, si la sucesión asociada de las sumas parciales representadas por S_n converge. El elemento S_n en la sucesión se define como la suma de los primeros n términos de la serie. Es decir que $\lim S_n$ existe y es finito. En otras palabras, la suma es un número real.

- Es *divergente*, si el $\lim S_n$ no existe. Es decir cuando la suma tiende a ∞ ó $-\infty$.

- Es *oscilante* cuando no es ninguna de las anteriores.

Toda serie de términos positivos es convergente o divergente, pero nunca oscilante,

En una serie, si se altera arbitrariamente el orden de los términos, descomponiendo arbitrariamente cada uno de los sumandos, no se altera su carácter, ni varía su suma.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Esto quiere decir, que si los términos se acercan a cero, la serie es convergente.

De lo anterior, se puede deducir que todas las *series de incrementos constantes*[2], son divergentes.

Una *serie geométrica* tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, donde a es un escalar fijo (número real)[3].

Una serie de este tipo converge si $|r| < 1$ y la suma es $S_n = \frac{a}{1-r}$.

Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica diverge.

Ejemplos.
Determinar la naturaleza de las siguientes series:

1) $s_n = \sum \frac{10}{3^n}$

Solución:

$$s_n = \frac{10}{3} + \frac{10}{9} + \frac{10}{27} + \frac{10}{81} + \frac{10}{243} + \frac{10}{729} + \cdots$$

$$\cong 3.33333 + 1.11111 + 0.37037 + 0.12345 + 0.04115 + 0.01371 + \cdots$$

$\cong 4.99314$, por lo tanto, la serie es convergente, cuya suma es 5.

2) $s_n = \sum \frac{n}{n+1}$

Solución:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \cdots$$

$$\cong 0.5 + 0.66666 + 0.75 + 0.8 + 0.83333 + 0.85714 + \cdots$$

Como los términos no tienden a 0, la serie es divergente.

3) $s_n = \sum \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}$

Solución:

$$s_n = 4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \frac{64}{625} + \frac{128}{3125} + \cdots$$

$$\cong 4 + 1.6 + 0.64 + 0.256 + 0.1024 + 0.04096 + \cdots$$

$\cong 6.63936$, por lo tanto, la serie es convergente, cuya suma es $\frac{20}{3}$.

---

[2] En esta serie el primer término es a_1 y los demás, se obtienen sumando aritméticamente al número precedente, otro denominado d. Obsérvese el paralelismo con la definición de progresión aritmética vista en la sección VI.1.1.

[3] En esta serie el primer término es a y los demás se obtienen multiplicando al número precedente por una razón r. Obsérvese el paralelismo con la definición de progresión geométrica vista en la sección VI.1.1.

4) $s_n = \sum \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

Solución:

$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{6}{\sqrt{37}} + \cdots$

$\cong 0.70710 + 0.89442 + 0.94868 + 0.97014 + 0.98058 + 0.98639 + \cdots$

Como los términos tienden a 1 y no a 0, la serie es divergente.

5) $s_n = \sum(-5+6n)$

Solución:

$s_n = 1+7+13+19+25+31+\cdots$

Se trata de una serie de incrementos constantes con $a_1 = -5$ y $d = 6$, por lo tanto, la serie es divergente.

6) $s_n = \sum 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Solución:

Se trata de una serie geométrica. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente, cuya suma es:

$s_n = -\frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \frac{80}{81} - \frac{160}{343}\cdots$

$s_n = \frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$

7) $s_n = \sum 3(-2)^n$

Solución:

Se trata de una serie geométrica. Como $|r| = 2 > 1$, la serie es divergente.

V.3 SUMA DE RIEMANN

Sea un intervalo cerrado $[a,b]$, al conjunto de puntos $P_n = \{ x_o, x_1, x_2, \cdots, x_n \}$ contenidos en dicho intervalo se le conoce como *partición* del intervalo $[a,b]$.

Esto implica que: $x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_{i-1} < x_i$ donde $i = 1,2,3,4,\cdots n$

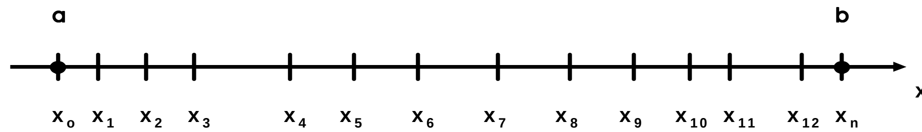
A cada subintervalo se le conoce como *celda*. A la distancia entre los puntos extremos de cada celda se le conoce como *amplitud de la celda*.

La amplitud de la primera celda es: $\Delta_1 x = x_1 - x_0$

La amplitud de la segunda celda es: $\Delta_2 x = x_2 - x_1$

La amplitud de la tercera celda es: $\Delta_3 x = x_3 - x_2$

Gráficamente:



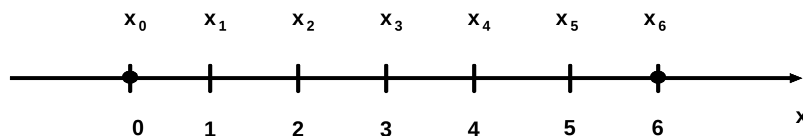
Como se puede advertir, la amplitud de las celdas viene dado por la diferencia de sus valores finales e iniciales. Por lo tanto, en general, la amplitud de cada celda viene dada por:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

A la mayor amplitud de las celdas de una partición se le denomina *norma de la partición* y se le denota por $\|\Delta\|$.

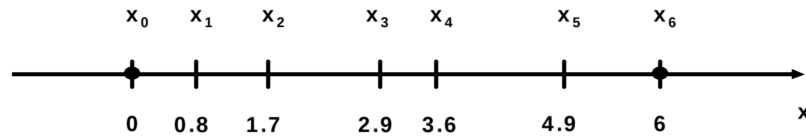
Ejemplo.
Dado el intervalo $[0,6]$, efectuar dos particiones diferentes de seis celdas y en cada caso determinar cuál es su norma.

Solución.
a) Si se hace una partición de igual amplitud:



$\Delta_1 x = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$
$\Delta_2 x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$
$\Delta_3 x = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1$
$\Delta_4 x = x_4 - x_3 = 4 - 3 = 1$
$\Delta_5 x = x_5 - x_4 = 5 - 4 = 1$
$\Delta_6 x = x_6 - x_5 = 6 - 5 = 1$
$\therefore$ su norma es $\|\Delta\| = 1$

b) Se hace una partición de la manera que se indica:



$\Delta_1 x = x_1 - x_0 = 0.8 - 0 = 0.8$
$\Delta_2 x = x_2 - x_1 = 1.7 - 0.8 = 0.9$
$\Delta_3 x = x_3 - x_2 = 2.9 - 1.7 = 1.2$
$\Delta_4 x = x_4 - x_3 = 3.6 - 2.9 = 0.7$
$\Delta_5 x = x_5 - x_4 = 4.9 - 3.6 = 1.3$
$\Delta_6 x = x_6 - x_5 = 6 - 4.9 = 1.1$
$\therefore$ la norma de esta partición es $\|\Delta\| = 1.3$

Sea una función $y = f(x)$ definida y limitada en un conjunto D. Considérese una partición en dicho conjunto que contenga n subintervalos.

Si se escoge un punto ξ en cada subintervalo de la partición de forma tal que:

$\xi_1 \in [x_0, x_1]$ o bien: $x_0 \le \xi_1 \le x_1$
$\xi_2 \in [x_1, x_2]$ o bien: $x_1 \le \xi_2 \le x_2$
$\xi_3 \in [x_2, x_3]$ o bien: $x_2 \le \xi_3 \le x_3$

y en general:

$\xi_i \quad \in \quad [x_{i-1}, x_i]$ o bien: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$

Si se forma la suma de productos del valor de f en cada punto ξ por la amplitud de la celda respectiva, se tendrá:

$$f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + \cdots + f(\xi_i)\Delta_i x + \cdots + f(\xi_n)\Delta_n x$$

que en forma concentrada se puede representar como:

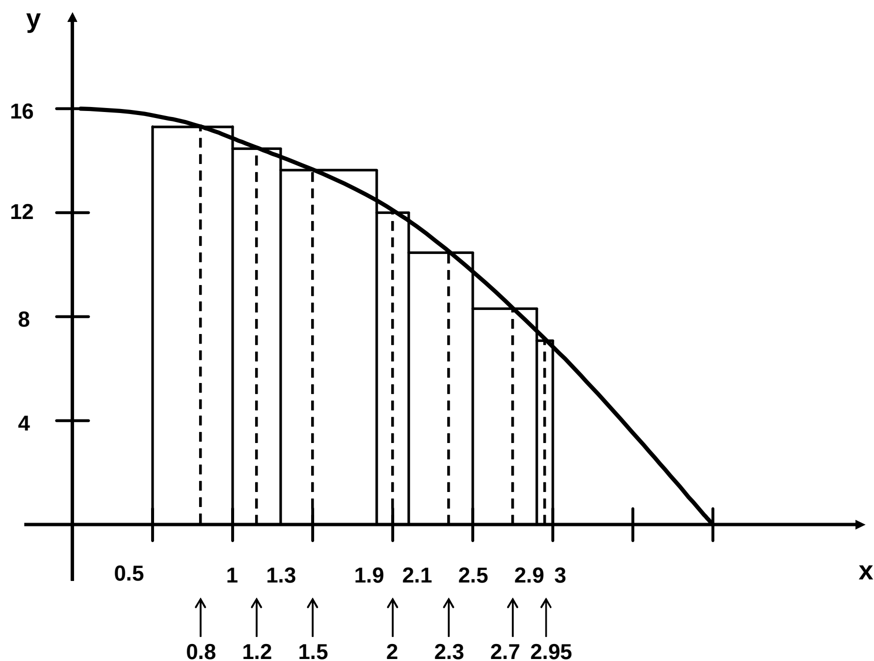
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

expresión que se conoce como *Suma de Riemann*.

Esta expresión calcula la suma de cada una de las bases (las celdas, Δx) por su respectiva altura (que son las $f(\xi)$) de una función, dada una partición. Esto determina la suma de las áreas de los rectángulos formados.

Ejemplo.
Dada la función $y = -x^2 + 16$ con $0.5 \leq x_1 \leq 3$, obtener la suma de Riemann para la función dada la partición: $x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1.3, \quad x_3 = 1.9, \quad x_4 = 2.1, \quad x_5 = 2.5, \quad x_6 = 2.9, \quad x_7 = 3$

Solución:
Los puntos elegidos de cada celda son:
$\xi_1 = 0.8, \quad \xi_2 = 1.2, \quad \xi_3 = 1.5, \quad \xi_4 = 2, \quad \xi_5 = 2.3, \quad \xi_6 = 2.7, \quad \xi_7 = 2.95$
Graficando se tiene:



La suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + f(\xi_5)\Delta_5 x + f(\xi_6)\Delta_i x + f(\xi_7)\Delta_7 x$$

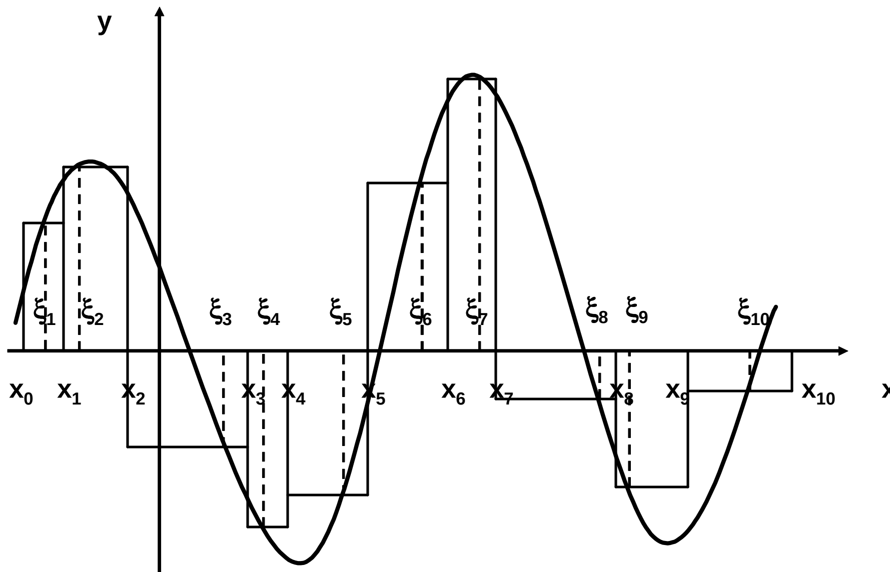
$$= f(0.8)(1-0.5) + f(1.2)(1.3-1) + f(1.5)(1.9-1.3) + f(2)(2.1-1.9) + f(2.3)(2.5-2.1) + f(2.7)(2.9-2.5) + f(2.95)(3-2.9)$$

$$= 15.36(0.5) + 14.56(0.3) + 13.75(0.6) + 12(0.2) + 10.71(0.4) + 8.71(0.4) + 7.29(0.1)$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)\Delta_i x = 31.195$$

y $\|\Delta\| = 0.6$.

En el caso siguiente:



se aprecia que algunas de las áreas son negativas, por lo tanto, la interpretación geométrica de la suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

puesto que $f(\xi_3),\ f(\xi_4),\ f(\xi_5),\ f(\xi_8),\ f(\xi_9),\ f(\xi_{10})$ son números negativos.

V.4 INTEGRAL DEFINIDA

Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la integral definida de f de a a b se define como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \quad \text{(si el límite existe)}$$

$f(x)$ se llama integrando.
a y b son los extremos o límites de integración (a es el extremo inferior y b es el extremo superior)
$\int$ se llama signo de integración.

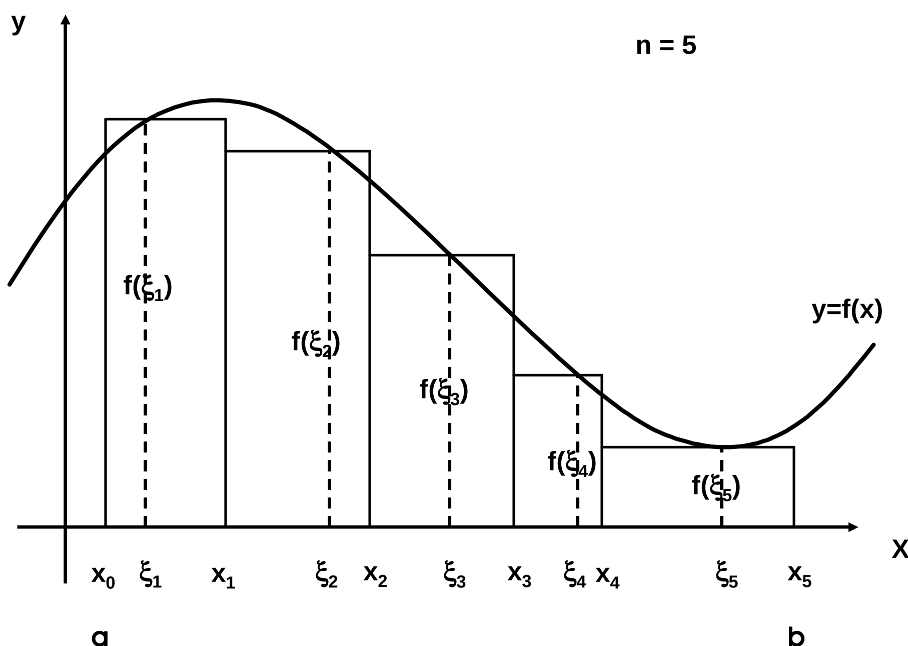
Si $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$, por lo tanto:

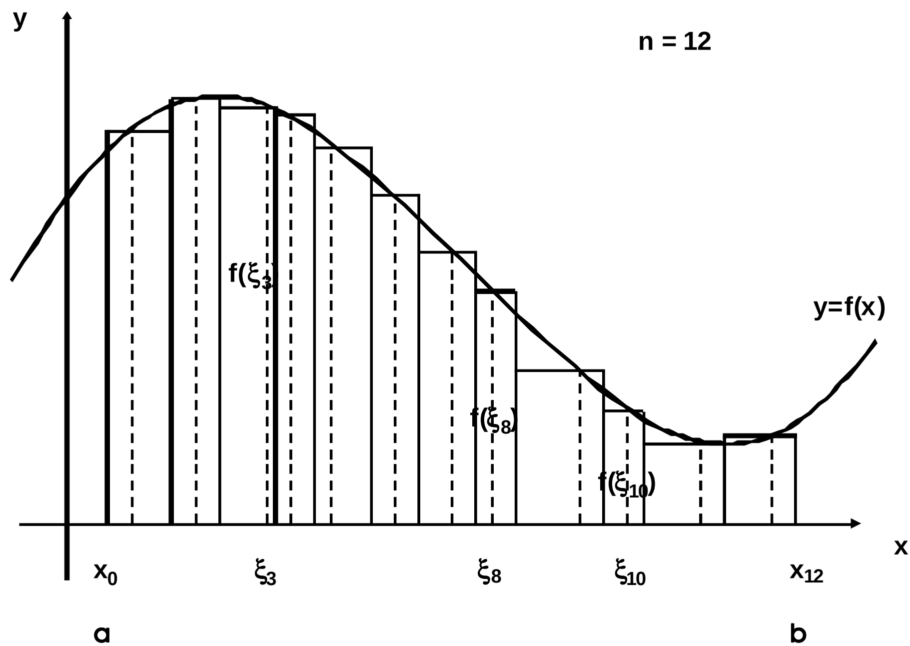
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

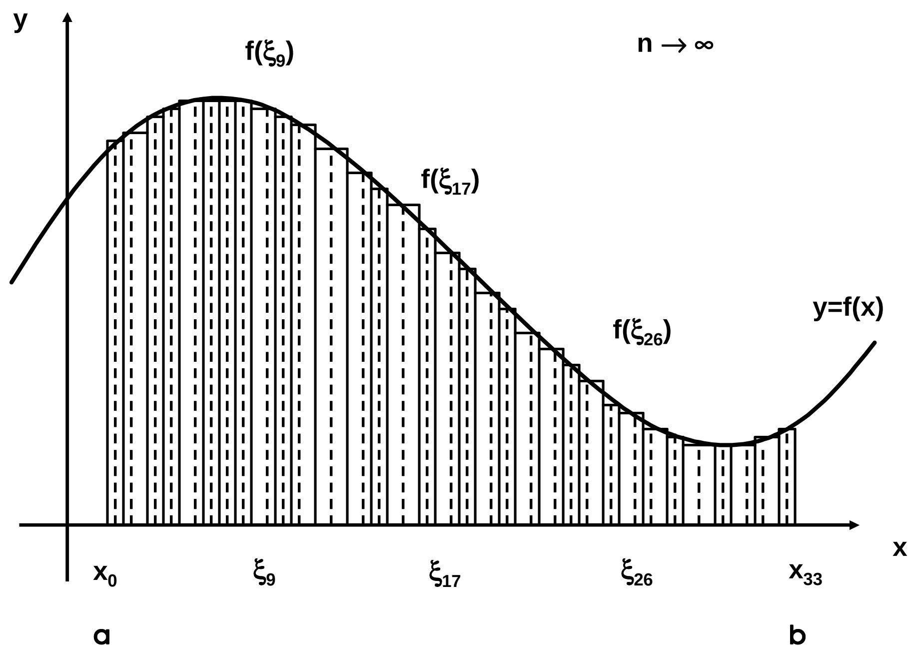
V.5 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ representa la suma de los n rectángulos. Si la norma de la partición tiende a cero implica que el número de celdas se incrementa, es decir que cada vez se tienen más y más rectángulos que se aproximan al área real bajo la curva.

Por lo tanto, por definición: *la integral definida es el área bajo la curva en sus límites*.







Las figuras anteriores muestran como la suma de rectángulos se aproxima al área real bajo la curva si $n \to \infty$.

Ejemplo.

Obtener $\int_{1}^{4} x^2 \, dx$ en forma aproximada utilizando una partición de ocho celdas.

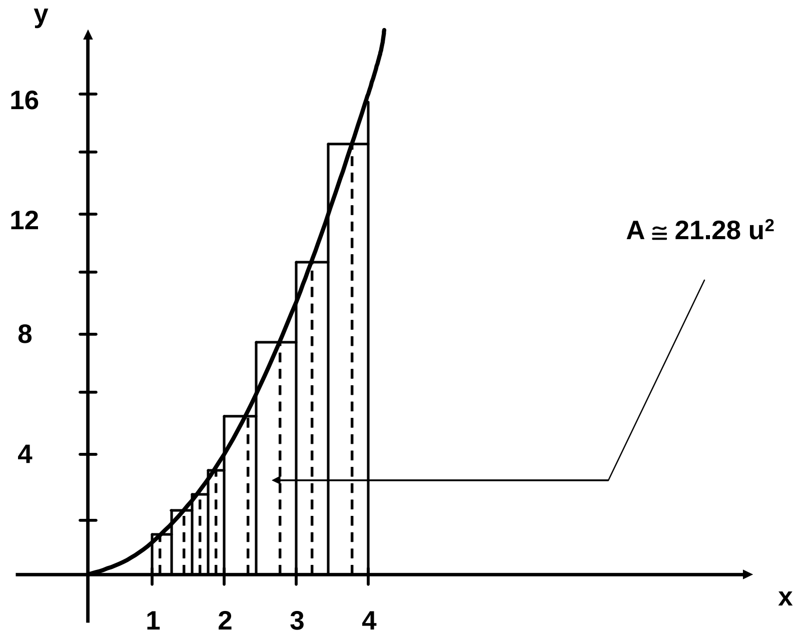
Solución.
Efectuando la partición:

$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.25, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 1.75, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2.5, \quad x_6 = 3, \quad x_7 = 3.5, \quad x_8 = 4$

los puntos elegidos de cada celda son:

$\xi_1 = 1.1, \quad \xi_2 = 1.3, \quad \xi_3 = 1.6, \quad \xi_4 = 1.8, \quad \xi_5 = 2.4, \quad \xi_6 = 2.8, \quad \xi_7 = 3.25, \quad \xi_8 = 3.75$

graficando se tiene:



$$\int_1^4 x^2\,dx = f(1.1)[1.25-1] + f(1.3)[1.5-1.25] + f(1.6)[1.75-1.5] + f(1.8)[2-1.75] + f(2.4)[2.5-2] +$$

$$f(2.8)[3-2.5] + f(3.25)[3.5-3] + f(3.75)[4-3.5]$$

$$= 1.21(0.25) + 1.69(0.25) + 2.56(0.25) + 3.24(0.25) + 5.76(0.5) + 7.84(0.5) + 10.5625(0.5) + 14.0625(0.5)$$

$$\therefore \int_1^4 x^2\,dx \cong 21.28\,u^2.$$

V.6 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo de integración $[a,b]$ y k una constante cualquiera:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ cuando $a < c < b$

V.7 INTEGRAL INDEFINIDA O ANTIDERIVADA

Una función F será antiderivada, o primitiva, de otra función f en un intervalo $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en el intervalo.
Esto es, si $F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x)$

Ejemplo.
Sea $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 10x$. Eso implica: $f'(x) = 15x^2 + 24x - 10$
La antiderivada de esta función es la función original $f(x)$. Esto significa que:

$$\int (15x^2 + 24x - 10)\,dx = 5x^3 + 12x^2 - 10x$$

La función $f(x)$ tiene una antiderivada particular $[a,b]$ que es $F(x)$.
La antiderivada general de $f(x)$ es:

$$F(x) + C$$

donde C es una constante.

Ejemplo.
Sea $f(x) = 9x^2 + 7x - 4 \Rightarrow f'(x) = 18x + 7$
$\int (18x + 7)\,dx = 9x^2 + 7x + C$

V.8 FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACIÓN

Si $u,\ v,\ w$ tres funciones de x y a una constante cualquiera. Las 27 fórmulas fundamentales de integración son:

1) $\int du = u + C$

2) $\int (u \pm v \pm w)\,dx = \int u\ dx \pm \int v\ dx \pm \int w\ dx$

3) $\int a u\ du = a\int u\ du$

4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$

5) $\int sen u\ du = -\cos u + C$

6) $\int \cos u \, du = sen\, u + C$

7) $\int \tan u \, du = \ln\left|\sec u\right| + C$

8) $\int \cot u \, du = \ln\left|sen\, u\right| + C$

9) $\int \sec u \, du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$

10) $\int \csc u \, du = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + C$

11) $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

12) $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

13) $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

14) $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$

15) $\int e^u \, du = e^u + C$

16) $\int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C$

17) $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$

18) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + C$

19) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

20) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

21) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

22) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$

23) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

24) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

25) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2}a^2 sen^{-1}\frac{u}{a} + C$

26) $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

27) $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

V.9 INTEGRALES DIRECTAS E INTEGRALES QUE REQUIEREN CAMBIO DE VARIABLE

Una integral directa es aquella que se adapta exactamente al integrando con una de las fórmulas fundamentales. Sin embargo, la gran mayoría no son directas, por tanto, antes de integrar se debe completar la diferencial du para adaptarla a una fórmula, lo que obliga a hacer intervenir una constante que multiplique y divida a la integral. En seguida, se extrae de la integral a la constante que no haga falta para completar la diferencial du tal y como lo indica la fórmula número 3.

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales inmediatas:

1) $\int dx = x + C$

2) $\int 4\,dx = 4x + C$

3) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

4) $\int 8x^5\,dx = \frac{8x^6}{6} + C$

5) $\int \left(12x^5 + 13x^4 - 11x^3 - 10x^2 + 7x - 8\right)dx = \frac{12x^6}{6} + \frac{13x^5}{5} - \frac{11x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 8x + C$

6) $\int \frac{2}{x^4}\,dx = \int 2x^{-4}dx = \frac{2x^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$

7) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

8) $\int \sqrt[11]{x^7}\,dx = \int x^{\frac{7}{11}}dx = \frac{x^{\frac{18}{11}}}{\frac{18}{11}} + C = \frac{11}{18}\sqrt[11]{x^{18}} + C$

9) $\int \frac{-9}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \int \frac{-9}{x^{\frac{5}{3}}}\,dx = \int -9x^{-\frac{5}{3}}dx = \frac{-9x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = \frac{27}{2x^{\frac{2}{3}}} + C = \frac{27}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$

10) $\int \left(\frac{x^3 - 5x^2 - 4}{x^2}\right)dx = \int \left(x - 5 - \frac{4}{x^2}\right)dx = \int \left(x - 5 - 4x^{-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{4}{x} + C$

11) $\int \left(\frac{4x^3 - 10x^2 - 16x - 14}{2x^5}\right)dx = \int \left(2x^{-2} - 5x^{-3} - 8x^{-4} - 7x^{-5}\right)dx$

$$=\frac{2x^{-1}}{-1}-\frac{5x^{-2}}{-2}-\frac{8x^{-3}}{-3}-\frac{7x^{-4}}{-4}+C=-\frac{2}{x}+\frac{5}{2x^2}+\frac{8}{3x^3}+\frac{7}{4x^4}+C$$

12) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{(1+x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C$

$$=2\sqrt{x}+\frac{4\sqrt{x^3}}{3}+\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+C$$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales efectuando cambio de variable:

13) $\int (x^3+2)^2\,3x^2\,dx$ $\qquad u=x^3+2 \quad\Rightarrow\quad du=3x^2\,dx$

$$\Rightarrow\int u^2\,du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x^3+2)^3}{3}+C$$

14) $\int \frac{8x^4}{(x^5+6)^7}dx$ $\qquad u=x^5+6 \quad\Rightarrow\quad du=5x^4\,dx$

$$\Rightarrow\frac{8}{5}\int\frac{du}{u^7}=\frac{8}{5}\int u^{-7}du=\left(\frac{8}{5}\right)\frac{u^{-6}}{-6}+C=\frac{8}{-30u^6}=-\frac{8}{30(x^5+6)^6}+C$$

15) $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}}\,x^2\,dx$ $\qquad u=x^3+2 \quad\Rightarrow\quad du=3x^2\,dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2\sqrt{(x^3+2)^3}}{9}+C$$

16) $\int \frac{8x^2}{(x^3+17)^3}dx$ $\qquad u=x^3+17 \quad\Rightarrow\quad du=3x^2\,dx$

$$\Rightarrow\frac{8}{3}\int\frac{du}{u^3}=\frac{8}{3}\int u^{-3}du=\left(\frac{8}{3}\right)\frac{u^{-2}}{-2}+C=\frac{8}{-6u^2}=-\frac{4}{3(x^3+17)^2}+C$$

17) $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx$ $\qquad u=x^2+6x \quad\Rightarrow\quad du=(2x+6)\,dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}du=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+C$$

18) $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$

$$=\int (x^2-2x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int\left[x^2(1-2x^2)\right]^{\frac{1}{2}}dx=\int x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$u=1-2x^2 \quad\Rightarrow\quad du=-4x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{-4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \left(\frac{1}{-4}\right)\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2\sqrt{\left(1-2x^2\right)^3}}{12} + C$$

19) $\int sen\ 4x\ dx$

$u = 4x \quad \Rightarrow \quad du = 4\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int sen\ u\ du = -\frac{1}{4}\cos u + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$$

20) $\int \cos\frac{1}{2}x\ dx$

$u = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2}\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}\int \cos u\ du = 2\ sen\ u + C = 2\ sen\ \frac{1}{2}x + C$$

21) $\int \tan 5x\ dx$

$u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int \tan u\ du = \frac{1}{5}\ln\left|\sec u\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\sec 5x\right| + C$$

22) $\int x\cot x^2\ dx$

$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \cot u\ du = \frac{1}{2}\ln\left|sen\ u\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|sen\ x^2\right| + C$$

23) $\int \sec 11x\ dx$

$u = 11x \quad \Rightarrow \quad du = 11\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}\int \sec u\ du = \frac{1}{11}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + C = \frac{1}{11}\ln\left|\sec 11x + \tan 11x\right| + C$$

24) $\int 7x\csc 10x^2\ dx$

$u = 10x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 20x\ dx$

$$\Rightarrow \frac{7}{20}\int \csc u\ du = \frac{7}{20}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + C = \frac{7}{20}\ln\left|\csc 10x^2 - \cot 10x^2\right| + C$$

25) $\int \sec^2 8x\ dx$

$u = 8x \quad \Rightarrow \quad du = 8\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int \sec^2 u\ du = \frac{1}{8}\tan u + C = \frac{1}{8}\tan 8x + C$$

26) $\int 5x\sec 7x^2\ \tan 7x^2\ dx$

$u = 7x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 14x\ dx$

$$\Rightarrow \frac{5}{14}\int \sec u \tan u \, du = \frac{5}{14}\sec u + C = \frac{5}{14}\sec 7x^2 + C$$

27) $\int 17w^3 \csc 13w^4 \cot 13x^4 \, dw$

$u = 13w^4 \quad \Rightarrow \quad du = 52w^3 \, dw$

$$\Rightarrow \frac{17}{52}\int \csc u \cot u \, du = -\frac{17}{52}\csc u + C = -\frac{17}{52}\csc 13w^4 + C$$

28) $\int 15k^6 \csc^2 4k^7 \, dk$

$u = 4k^7 \quad \Rightarrow \quad du = 28k^6 \, dk$

$$\Rightarrow \frac{15}{28}\int \csc^2 u \, du = -\frac{15}{28}\cot u + C = -\frac{15}{28}\cot 4k^7 + C$$

29) $\int 10\, e^{5x} \, dx$

$u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5\, dx$

$$\Rightarrow \frac{10}{5}\int e^u \, du = 2e^u + C = 2e^{5x} + C$$

30) $\int \frac{1}{19}\cos 6x \, e^{sen\, 6x} \, dx$

$u = sen\, 6x \quad \Rightarrow \quad du = 6\cos 6x \, dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{19(6)}\int e^u \, du = \frac{1}{114}e^u + C = \frac{1}{114}e^{sen\, 6x} + C$$

31) $\int \frac{13}{9}x^4 e^{10x^5} \, dx$

$u = 10x^5 \quad \Rightarrow \quad du = 50x^4 \, dx$

$$\Rightarrow \frac{13}{9(50)}\int e^u \, du = \frac{13}{450}e^u + C = \frac{13}{450}e^{10x^5} + C$$

32) $\int \frac{2x^2}{3+6x^3} \, dx$

$u = 3 + 6x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 18x^2 \, dx$

$$\Rightarrow \frac{2}{18}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{18}\ln|u| + C = \frac{2}{18}\ln\left|3+6x^3\right| + C$$

33) $\int \frac{sen\, 5x}{\cos 5x} \, dx$

$u = \cos 5x \quad \Rightarrow \quad du = -5sen\, 5x \, dx$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{5}\ln|u| + C = -\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$$

34) $\int \frac{3\left(8x+11x^2\right)^2 (8+22x)}{\left(8x+11x^2\right)^3} \, dx$

$u = \left(8x+11x^2\right)^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3\left(8x+11x^2\right)^2 (8+22x) \, dx$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|(8x+11x^2)^3\right| + C$$

35) $\int 5^{6x}\, dx$

$u = 6x \quad \Rightarrow \quad du = 6\, dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\int 5^u\, du = \frac{1}{6}\frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{1}{6}\frac{5^{6x}}{\ln 5} + C$$

36) $\int 3x^8\, 9^{17x^9}\, dx$

$u = 17x^9 \quad \Rightarrow \quad du = 153x^8\, dx$

$$\Rightarrow \frac{3}{153}\int 9^u\, du = \frac{3}{153}\frac{9^u}{\ln 9} + C = \frac{3}{153}\frac{9^{17x^9}}{\ln 9} + C$$

37) $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

$a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2; \quad u^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$$\Rightarrow 6\int \frac{du}{\sqrt{2^2 - u^2}} = 6sen^{-1}\frac{u}{2} + C = 6sen^{-1}\frac{x}{2} + C$$

38) $\int \frac{-9}{16+25x^2}\, dx$

$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4; \quad u^2 = 25x^2 \quad \Rightarrow \quad u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5\, dx$

$$\Rightarrow -\frac{9}{5}\int \frac{du}{4^2 + u^2} = -\frac{9}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\tan^{-1}\frac{u}{4} + C = -\frac{9}{20}\tan^{-1}\frac{5x}{4} + C$$

39) $\int \frac{15x}{x^2\sqrt{x^4 - 81}}\, dx$

$a^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad a = 9; \quad u^2 = x^4 \quad \Rightarrow \quad u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\, dx$

$$\Rightarrow \frac{15}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 9^2}} = \frac{15}{2}\left(\frac{1}{9}\right)\sec^{-1}\frac{u}{9} + C = \frac{15}{18}\sec^{-1}\frac{x^2}{9} + C$$

40) $\int \frac{10x^2}{49x^6 - 36}\, dx$

$a^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad a = 6; \quad u^2 = 49x^6 \quad \Rightarrow \quad u = 7x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 21x^2\, dx$

$$\Rightarrow \frac{10}{21}\int \frac{du}{u^2 - 6^2} = \frac{10}{21}\left(\frac{1}{2(6)}\right)\ln\left|\frac{u-6}{u+6}\right| + C = \frac{10}{252}\ln\left|\frac{7x^3 - 6}{7x^3 + 6}\right| + C$$

41) $\int \frac{x^3}{x^8 - 10}\, dx$

$a^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{10}; \quad u^2 = x^8 \quad \Rightarrow \quad u = x^4 \quad \Rightarrow \quad du = 4x^3\, dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{10}\right)}\right)\ln\left|\frac{u - \sqrt{10}}{u + \sqrt{10}}\right| + C = \frac{1}{8\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^4 - \sqrt{10}}{x^4 + \sqrt{10}}\right| + C$$

42) $\int \frac{9x^5}{49-4x^{12}}\,dx$

$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7; \quad u^2 = 4x^{12} \quad \Rightarrow \quad u = 2x^6 \quad \Rightarrow \quad du = 12x^5\,dx$

$\Rightarrow \frac{9}{12}\int \frac{du}{7^2-u^2} = \frac{9}{12}\left(\frac{1}{2(7)}\right)\ln\left|\frac{7+u}{7-u}\right| + C = \frac{9}{168}\ln\left|\frac{7+2x^6}{7-2x^6}\right| + C$

43) $\int \frac{-3x^4}{\sqrt{4+x^{10}}}\,dx$

$a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2; \quad u^2 = x^{10} \quad \Rightarrow \quad u = x^5 \quad \Rightarrow \quad du = 5x^4\,dx$

$\Rightarrow -\frac{3}{5}\int \frac{du}{\sqrt{2^2+u^2}} = -\frac{3}{5}\ln\left|u+\sqrt{u^2+2^2}\right| + C = -\frac{3}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}+4}\right| + C$

44) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{sen^2\,x-25}}\,dx$

$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 5; \quad u^2 = sen^2 x \quad \Rightarrow \quad u = sen\,x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x\,dx$

$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2-5^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-5^2}\right| + C = \ln\left|sen\,x+\sqrt{sen^2\,x-25}\right| + C$

45) $\int \sqrt{100-64x^2}\,dx$

$a^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad a = 10; \quad u^2 = 64x^2 \quad \Rightarrow \quad u = 8x \quad \Rightarrow \quad du = 8\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{8}\int \sqrt{10^2-u^2} = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{2}\right)u\sqrt{10^2-u^2} + \frac{1}{2}(10)^2 sen^{-1}\frac{u}{10}\right) + C$

$= \frac{8x}{16}\sqrt{100-64x^2} + \frac{100}{16}sen^{-1}\frac{8x}{10} + C$

46) $\int \sqrt{3x^2+5}\,dx$

$a^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{5}; \quad u^2 = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad du = \sqrt{3}\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{u^2+5^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)u\sqrt{u^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{1}{2}(5)\ln\left|u+\sqrt{u^2+5}\right|\right) + C$

$= \frac{x}{2}\sqrt{3x^2+5} + \frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+5}\right| + C$

47) $\int \sqrt{x^2-36}\,dx$

$a^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad a = 6; \quad u^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$\Rightarrow \int \sqrt{u^2-6^2} = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-6^2} - \frac{1}{2}\left(6^2\right)\ln\left|u+\sqrt{u^2-6^2}\right| + C$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-36} - 18\ln\left|x+\sqrt{x^2-36}\right| + C$

V.10 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. REGLA DE BARROW

Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y si $g(x)$ cumple que $\frac{dg(x)}{dx} = f(x) \ \forall x \ [a,b]$ entonces, el *teorema fundamental del cálculo*[4] establece que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Expresión conocida como *Regla de Barrow*.

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales:

1) $\int_1^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \cong 8.66$

2) $\int_{-2}^{5} \left(6x^3 - 8x^2 + 7x - 2\right)dx = \left.\frac{6}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x\right|_{x=-2}^{x=5}$

$= \left[\frac{6}{4}(625) - \frac{8}{3}(125) + \frac{7}{2}(25) - 2(5)\right] - \left[\frac{6}{4}(16) - \frac{8}{3}(-8) + \frac{7}{2}(4) + 2(-2)\right]$

$= 937.5 - 333.33 + 87.5 - 10 - 24 - 21.33 - 14 + 4 \cong 626.33$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = sen\,x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = sen\,\frac{\pi}{4} - sen\,0 = 0.7071 - 0 = 0.7071$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\cos^2 x\,dx$

Con cambio el variable:

$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -sen\,x\,dx$

se cambian los límites de integración: $u_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0; \quad u_2 = \cos 0 = 1$

$= \frac{1}{-1}\int_1^0 u^2\,du = -\left.\frac{u^3}{3}\right|_{u=1}^{u=0} = \left(-\frac{0^3}{3}\right) - \left(-\frac{1^3}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Comprobando (sin cambio de variable):

$= -\left.\frac{\cos^3 x}{3}\right|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{0^3}{3}\right) - \left(-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$

La integral indefinida de la función continua $y = f(x)$, formalmente se define como:

$$\int_a^x F(x)\,dx + C$$

[4] La demostración de los teoremas expuestos en los Subtemas VI.10 y VI.11 pueden consultarse en el capítulo 7 del libro *Cálculo con Geometría Analítica* de Protter y Morrey incluido en la bibliografía.

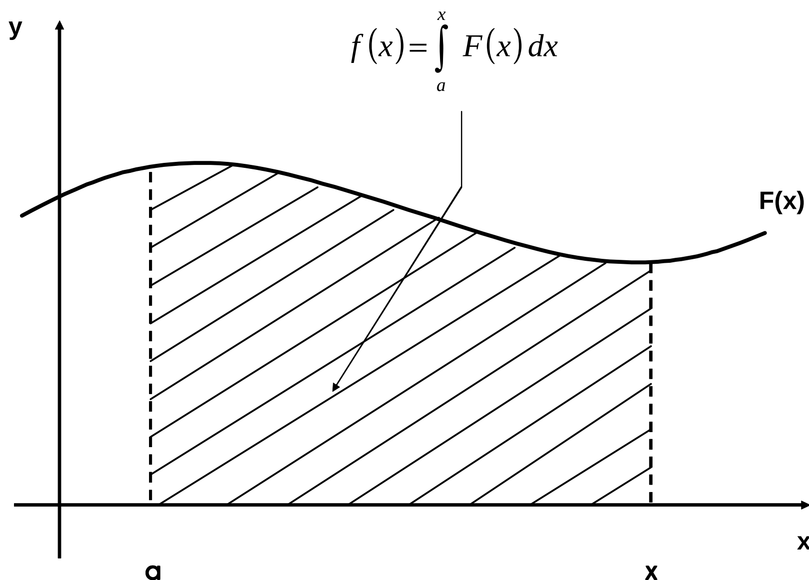
Ejemplo.
Sea $F(x)=6x+8$

$$\int_{-3}^{x} F(x)\,dx=\int_{-3}^{x}(6x+8)\,dx=\frac{6}{2}x^2+8x\Big|_{-3}^{x}=3x^2+8x-\left(3(-3)^2+8(-3)\right)=3x^2+8x-3$$

$\therefore \quad f(x)=3x^2+8x-3$

$$\frac{df(x)}{dx}=6x+8=F(x)$$

Esto significa que la integral indefinida , es una *integral definida con extremo superior variable*.
Gráficamente:



Finalmente, a partir de lo anterior, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} F(x)\,dx=F(x)$$

y

$$\int \underbrace{\frac{d}{dx}F(x)\ dx}_{dF(x)}=F(x)+C$$

pero por definición de diferencial: $dF(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)dx$

$$\therefore \quad \int dF(x)=F(x)+C$$

El teorema fundamental del cálculo establece que la diferenciación y la integración son operaciones inversas.
Los símbolos $\int$ y d son operadores inversos.

V.11 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$; m es el mínimo absoluto que ocurre en x_m; M es el máximo absoluto que ocurre en x_M. Es decir:

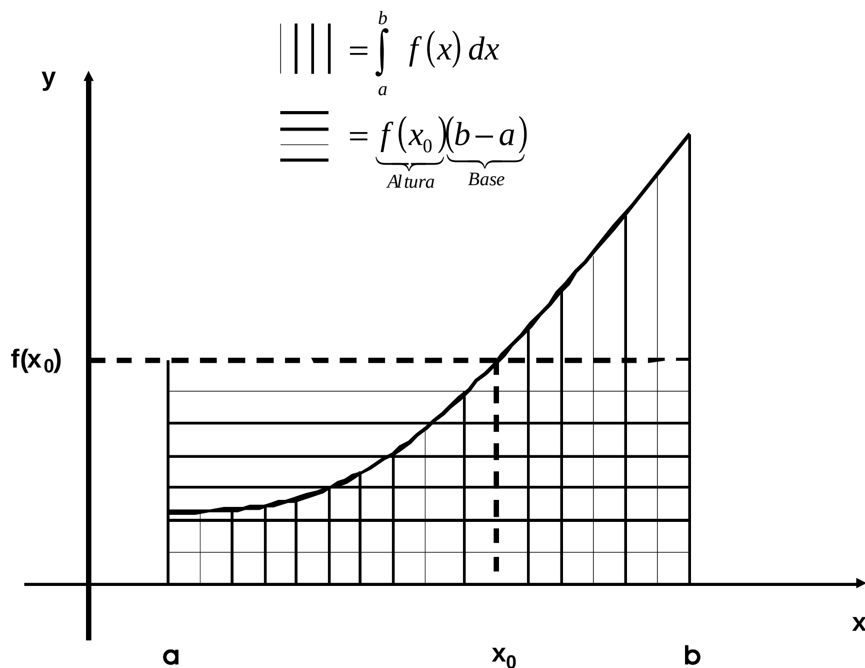
$$f(x_m) = m \qquad a \le x_m \le b$$
$$f(x_M) = M \qquad a \le x_M \le b$$
$$m \le f(x) \le M \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

$\therefore$ existe un número $x_0 \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a) \qquad a \le x_0 \le b, \quad m \le f(x_0) \le M$$

La igualdad $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$ se interpreta que, en toda función continua, el área bajo la curva siempre podrá ser igual al área de un rectángulo que tenga como base la amplitud del intervalo de definición de la función y como altura el valor de la función en algún punto del intervalo.

Gráficamente esto es:



Ejemplo.
Obtener x_0 de la función $y = 3x^2$ en el intervalo $1 \le x \le 2$.

Solución.

$$\int_1^2 3x^2\,dx = x^3\Big|_{x=1}^{x=2} = 8-1=7$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral: $7 = f(x_0)(2-1) \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = \frac{7}{2-1} = 7$

despejando x de la función: $x=\sqrt{\frac{y}{3}} \quad \therefore \quad x_0 = \sqrt{\frac{7}{3}} \cong 1.5275$.

V.12 INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean dos funciones u y v derivables de x, y considerando la regla para obtener la diferencial de un producto:

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du \quad \Rightarrow \quad u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$$

$$\int u\cdot dv = \int d(u\cdot v) - \int v\cdot du$$

$$\Rightarrow \quad \int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

El integrando se separa en dos partes. Una de ellas se iguala a u y la otra a dv (por eso se llama método de integración por partes). Se deben considerar dos aspectos:

1) La parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.
2) $\int v\cdot du$ no debe ser más complicada que $\int u\cdot dv$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:

1) $\int x\,e^x\,dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = x, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$\therefore \quad \int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$$

2) $\int x\,sen\,x\,dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = sen\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$\therefore \quad \int x\,sen\,x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + sen\,x + C$$

3) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = \sqrt{1+x}\,dx = (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad \int x\sqrt{1+x}\,dx = x\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2x}{3}\sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(1+x)^5} + C$$

4) $\int sen^2\,x\,dx$

$$\int sen^2\,x\,dx = \int sen\,x\,sen\,x\,dx$$

$$u = sen\,x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x\,dx, \quad dv = sen\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$\therefore \quad \int sen\,x\,sen\,x\,dx = sen\,x(-\cos x) - \int(-\cos x)(\cos x)\,dx = -sen\,x\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

pero se sabe que: $sen^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \therefore \quad \cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$$= -sen\,x\cos x + \int(1 - sen^2 x)dx = -sen\,x\cos x + \int dx - \int sen^2 x\,dx$$

pero la última integral es igual que la buscada, pero con signo contrario, por lo tanto:

$$2\int sen^2 x\,dx = -sen\,x\cos x + x + C \quad \Rightarrow \quad \int sen^2 x\,dx = \frac{x - sen\,x\cos x}{2} + C$$

5) $\int x^3 e^{2x}\,dx$

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2\,dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \int x^3 e^{2x}\,dx = x^3\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,3x^2\,dx = \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\underbrace{\int x^2 e^{2x}\,dx}_{integral\ por\ partes}$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \int x^2 e^{2x}\,dx = x^2\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,2x\,dx = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \underbrace{\int x\,e^{2x}\,dx}_{integral\ por\ partes}$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \int x\,e^{2x}\,dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\therefore \quad \int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left(\frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\right] + C$$

$$= \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3x^2e^{2x}}{4} + \frac{3x\,e^{2x}}{4} - \frac{3\,e^{2x}}{8} + C$$

V.13 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades más usadas en la resolución de integrales trigonométricas son:

1) $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

3) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

4) $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

5) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6) $sen\,x\cos x = \frac{1}{2}(sen\,2x)$

7) $2\,sen^2\frac{1}{2}x = 1 - \cos x$

8) $2\cos^2\frac{1}{2}x = 1 + \cos x$

9) $sen\,x\cos y = \frac{1}{2}\left[sen(x - y) + sen(x + y)\right]$

10) $sen\, x\, sen\, y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

11) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales utilizando identidades trigonométricas:

1) $\int sen^2\, x\, dx$

$$\int sen^2\, x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + C$$

2) $\int \cos^2 3x\, dx$

$$\int \cos^2 3x\, dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2}\cos 6x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} sen\, 6x + C$$

3) $\int \cos^5 x\, dx$

$$\int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1 - sen^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - 2\, sen^2 x + sen^4 x)\cos x\, dx = \int \cos x\, dx - 2\int sen^2 x \cos x\, dx + \int sen^4 x \cos x\, dx$$

$$= sen\, x - 2\int u^2\, du + \int u^4\, du = sen\, x - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = sen\, x - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5\, x + C$$

4) $\int sen^2\, x \cos^3 x\, dx$

$$\int sen^2\, x \cos^3 x\, dx = \int sen^2\, x(1 - sen^2\, x) \cos x\, dx = \int (sen^2 x - sen^4 x)\cos x\, dx$$

$$= \int sen^2 x \cos x\, dx - \int sen^4 x \cos x\, dx = \frac{1}{3} sen^3 x - \frac{1}{5} sen^5 x + C$$

5) $\int \sec^4 2x\, dx$

$$\int \sec^4 2x\, dx = \int \sec^2 2x \sec^2 2x\, dx + \int (1 + \tan^2 2x)\sec^2 2x\, dx$$

$$= \int \sec^2 2x dx + \int \tan^2 2x \sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x + C$$

6) $\int sen\, 2x \cos 4x\, dx$

$$\int sen\, 2x \cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int [sen(2x - 4x) + sen(2x + 4x)]dx = \frac{1}{2}\int sen(-2x)dx + \frac{1}{2}\int sen\, 6x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-\cos(-2x)) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)(-\cos 6x) + C = \frac{1}{4}\cos(-2x) - \frac{1}{12}\cos 6x + C$$

7) $\int sen\, 5x\, sen\, x\, dx$

$$\int sen\, 5x\, sen\, 4x\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(5x - x) - \cos(5x + x)]dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) sen\, 4x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)(sen\, 6x) + C = \frac{1}{8} sen\, 4x - \frac{1}{12} sen\, 6x + C$$

8) $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

$$\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(3x-2x)+\cos(3x+2x)]dx = \frac{1}{2}\int \cos x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 5x dx$$

$$= \frac{1}{2} sen\, x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) sen\, 5x + C = \frac{1}{2} sen\, x + \frac{1}{10} sen\, 5x + C$$

V.14 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Si P y Q son dos funciones polinómicas, teóricamente siempre es posible resolver integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$ se dice que es una *fracción propia*, en caso contrario es una *fracción impropia*.

En la práctica, la obtención de dichas integrales depende de que sea posible factorizar el denominador $Q(x)$.

Por la naturaleza de los factores del denominador, se consideran cuatro casos:

Caso 1: *Factores lineales distintos*

A cada factor lineal $ax+b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{ax+b}$ siendo A una constante a determinar.

Ejemplos

1) Hallar: $\int \frac{dx}{x^2-4}$

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$, multiplicando por x^2-4 se tiene: $1 = A(x-2)+B(x+2)$

Si $x=2 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(2-2)+(2+2)B \quad \Rightarrow \quad 4B=1 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{4}$

Si $x=-2 \quad \Rightarrow \quad 1=(-2-2)A+B(-2+2) \quad \Rightarrow \quad -4A=1 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-2}dx = -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$

2) Hallar: $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$

$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{x+1}{x\left(x^2+x-6\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$, multiplicando por x^3+x^2-6x se tiene:

$x+1=A(x+3)(x-2)+B\,x(x-2)+C\,x(x+3)$

Si $x=0$: $0+1=A(0+3)(0-2)+0B+0C \quad\Rightarrow\quad -6A=1 \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{6}$

Si $x=-3$: $-3+1=0A+B(-3)(-3-2)+0C \quad\Rightarrow\quad 15B=-2 \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{2}{15}$

Si $x=2$: $2+1=0A+0B+C(2)(2+3) \quad\Rightarrow\quad 10C=3 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{3}{10}$

$$\therefore \quad \int\frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}=\int\frac{-\frac{1}{6}}{x}dx+\int\frac{-\frac{2}{15}}{x+3}dx+\int\frac{\frac{3}{10}}{x-2}dx=-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+\frac{3}{10}\ln|x-2|+C$$

Caso 2: *Factores lineales iguales*

A cada factor cuadrático de la forma $(ax+b)^n$, donde $n\geq 1$, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma $\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}+\cdots$ siendo $A, B, C,\cdots$ constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener: $\int\frac{x\,dx}{(x-2)^2}$

$\frac{x}{(x-2)^2}=\frac{x}{(x-2)(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$

multiplicando por $(x-2)^2$ se tiene: $x=A(x-2)+B$

Si $x=2$: $2=0+B \quad\Rightarrow\quad B=2$

Si $x=0$: $0=A(-2)+2 \quad\Rightarrow\quad 2A=2 \quad\Rightarrow\quad A=1$

$\int\frac{x\,dx}{(x-2)^2}=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2\,dx}{(x-2)^2}$

ahora, haciendo el cambio de variable para la última integral:

$u=x-2 \quad\Rightarrow\quad du=dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{2\,dx}{(x-2)^2}=2\int u^{-2}\,du$

finalmente:

$$\int\frac{x\,dx}{(x-2)^2}=\ln|x-2|+\frac{2u^{-1}}{-1}+C=\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C$$

2) Obtener: $\int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{3x+5}{(x+1)(x^2-2x+1)}=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

multiplicando por x^3-x^2-x+1 se tiene: $3x+5=A(x-1)(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$

Si $x=-1$: $3(-1)+5=A(-1-1)(-1-1)+0B+0C \quad\Rightarrow\quad 4A=2 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Si $x=1$: $3(1)+5=0+0+C(1+1) \quad\Rightarrow\quad 2C=8 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{8}{2}=4$

Si $x=0$: $3(0)+5=\frac{1}{2}(0-1)^2+B(0+1)(0-1)+4(0+1)$

$\Rightarrow\quad 5=\frac{1}{2}-B+4 \quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{2}+4-5 \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{1}{2}$

$\therefore\quad \int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{1}{2}dx}{x-1}+\int\frac{4\,dx}{(x-1)^2}$. Ahora, haciendo el cambio de variable para la última integral: $u=x-1 \quad\Rightarrow\quad du=dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{4\,dx}{(x-1)^2}=\int u^{-2}\,du$

finalmente:

$$\int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{4u^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$$

Caso 3: *Factores cuadráticos distintos*

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ siendo A, B las constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$, multiplicando por x^4+3x^2+2 se tiene:

$x^3+x^2+x+2=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$

$x^3+x^2+x+2=Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D$

$x^3+x^2+x+2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+2C)x+B+2D$

Comparando:

$A+C=1 \quad$ _(1)

$B+D=1 \quad$ _(2)

$A+2C=1 \quad$ _(3)

$B+2D=2 \quad$ _(4)

de (1): $A=1-C$

sustituyendo en (3): $1-C+2C=1 \quad \Rightarrow \quad C=0$

$\therefore \quad A=1-0=1$

de (2): $B=1-D$,

sustituyendo en (4): $1-D+2D=2 \quad \Rightarrow \quad D=1$,

$\therefore \quad B=1-1=0$

$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\int \frac{1x+0}{x^2+2}dx+\int \frac{0x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x\,dx}{x^2+2}+\int \frac{dx}{x^2+1}$, Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera integral: $u=x^2+2 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

finalmente:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\ln|u|+\tan^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\tan^{-1}x+C$$

2) Obtener $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx$

$\frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}=\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$, multiplicando por x^4+4x^2+3 se tiene:

$x^3+x^2+x+3=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)$

$x^3+x^2+x+3=Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2+3Cx+3D$

$x^3+x^2+x+3=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+B+3D$

Comparando:

$A+C=1 \quad$ _(1)

$B+D=1 \quad$ _(2)

$A+3C=1 \quad$ _(3)

$B+3D=3 \quad$ _(4)

de (1): $A=1-C$

sustituyendo en (3): $1-C+3C=1 \quad \Rightarrow \quad C=0$

$\therefore \quad A=1-0=1$

de (2): $B=1-D$,

sustituyendo en (4): $1-D+3D=3 \quad \Rightarrow \quad D=1$,

$\therefore \quad B=1-1=0$

$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx=\int \frac{1x+0}{x^2+3}dx+\int \frac{0x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x\,dx}{x^2+3}+\int \frac{dx}{x^2+1}$, Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera integral: $u=x^2+3 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

finalmente:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx=\frac{1}{2}\ln|u|+\tan^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|+\tan^{-1}x+C$$

Caso 4: *Factores cuadráticos iguales*

A cada factor cuadrático irreducible $\left(ax^2+bx+c\right)^n$, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n factores de la forma:

$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}+\cdots$ siendo $A, B, C, D, \cdots$ constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener: $\int \frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

$\frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$ multiplicando por $\left(x^2+4\right)^2$ se tiene:

$2x^3+x^2+4=(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)$

$2x^3+x^2+4=Ax^3+Bx^2+4Ax+4B+Cx+D=Ax^3+Bx^2+(4A+C)x+(4B+D)$

Comparando:

$A=2 \qquad _(1)$

$B=1 \qquad _(2)$

$4A+C=0 \qquad _(3)$

$4B+D=4 \qquad _(4)$

de (1): $A=2$

sustituyendo en (3): $4(2)+C=0 \quad \Rightarrow \quad C=-8$

de (2): $B=1$,

sustituyendo en (4): $4(1)+D=4 \quad \Rightarrow \quad D=0$,

$$\int \frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int \frac{2x+1}{x^2+4}dx+\int \frac{-8x+0}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

$$\int \frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int \frac{2x}{x^2+4}dx+\int \frac{dx}{x^2+4}-\int \frac{8x}{\left(x^2+4\right)^2}\ dx$$

Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera y última integral:

$u=x^2+4 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx$ se tiene:

$$=\frac{2}{2}\int \frac{du}{u}dx-\int \frac{dx}{x^2+4}+\frac{8}{2}\int \frac{du}{u^2}$$

finalmente:

$$\int \frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\ln|u|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-4u^{-1}+C$$

$$=\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{4}{x^2+4}+C$$

2) Obtener: $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx$

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+2\right)^3}$$ multiplicando por $\left(x^2+2\right)^3$ se tiene:

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)\left(x^2+2\right)^2+(Cx+D)\left(x^2+2\right)+(Ex+F)$$

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)\left(x^4+4x^2+4\right)+(Cx+D)\left(x^2+2\right)+Ex+F$$

$$=Ax^5+Bx^4+4Ax^3+4Bx^2+4Ax+4B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D+Ex+F$$

$$=Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2+(4A+2C+E)x+4B+2D+F$$

Comparando:

$A=1$ _(1)

$B=-1$ _(2)

$4A+C=4$ _(3)

$4B+D=-4$ _(4)

$4A+2C+E=8$ _(5)

$4B+2D+F=-4$ _(6)

de (1): $A=1$

sustituyendo en (3): $4(1)+C=4 \quad \Rightarrow \quad C=0$

de (2): $B=-1$,

sustituyendo en (4): $4(-1)+D=-4 \quad \Rightarrow \quad D=0$,

de (5): $E=8-4(1)-2(0)=4$,

de (6): $F=-4-4(-1)-2(0)=0$,

$$\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx=\int\frac{1x-1}{x^2+2}dx+\int\frac{0x+0}{\left(x^2+2\right)^2}dx+\int\frac{4x+0}{\left(x^2+2\right)^3}dx$$

$$=\int\frac{x}{x^2+2}dx-\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{4x}{\left(x^2+2\right)^3}dx$$

Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera y última integral:

$u=x^2+2 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx$ se tiene:

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}dx-\int\frac{dx}{x^2+2}+\frac{4}{2}\int\frac{du}{u^3}$$

finalmente:

$$\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx=\frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}-u^{-2}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}+C$$

Ejemplo.

Resolver la siguiente integral racional impropia:

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$$

efectuando la división se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x^3 - x^2 & x^4 - x^3 - x - 1 \\ & -x^4 + x^3 \\ \hline & -x - 1 \end{array}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}\,dx = \int\left[x + \frac{(-x-1)}{x^3 - x^2}\right]dx$$

$\frac{-x-1}{x^3 - x^2} = \frac{-x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$, multiplicando por $x^3 - x^2$ se tiene:

$-x - 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$

Si $x = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 - 1 = 0A + 0B + C(1)^2 \quad \Rightarrow \quad C = -2$

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad -0 - 1 = 0A + B(0-1) + 0C \quad \Rightarrow \quad -B = -1 \quad \Rightarrow \quad B = 1$

Si $x = 2 \quad \Rightarrow \quad -2 - 1 = A(2)(2-1) + 1(2-1) + (-2)(2)^2 \quad \Rightarrow \quad -3 = 2A + 1 - 8 \quad \Rightarrow \quad A = 2$

$$\therefore \quad \int\left[x + \frac{(-x-1)}{x^3 - x^2}\right]dx = \int x\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{-2}{x-1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C$$

V.15 INTEGRALES IMPROPIAS

Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se denomina *impropia* si:

a) El integrando $f(x)$, tiene uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $a \le x \le b$
b) Por lo menos uno de los límites de integración es infinito.

a) *Integrando discontinuo*

i) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a \le x < b$ pero es discontinua en $x = b$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx$; es discontinua en $x = 3$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \; sen^{-1} \frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[sen^{-1}\frac{3-\varepsilon}{3}-sen^{-1}\frac{0}{3}\right]=sen^{-1}\frac{3}{3}-sen^{-1}0=sen^{-1}1-0=\frac{\pi}{2}$$

ii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a<x\le b$ pero es discontinua en $x=a$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$; es discontinua en $x=2$

$$\therefore\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{2+\varepsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x-2}\Big|_{2+\varepsilon}^5=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{5-2}-2\sqrt{2+\varepsilon-2}\right]=2\sqrt{3}-0=2\sqrt{3}$$

iii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a\le x\le b$ pero es discontinua en $x=c$, donde $a<c<b$, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplos.

1) Calcular: $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$; presenta discontinuidad en $x=2$

$$\therefore\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}3\sqrt[3]{x-2}\Big|_0^{2-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}3\sqrt[3]{x-2}\Big|_{2+\varepsilon}^4$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{2-\varepsilon-2}-3\sqrt[3]{0-2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{4-2}-3\sqrt[3]{2+\varepsilon-2}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{\varepsilon}-3\sqrt[3]{-2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{\varepsilon}\right)=-3\sqrt[3]{-2}+3\sqrt[3]{2}=2\left(3\sqrt[3]{2}\right)=6\sqrt[3]{2}$$

2) Calcular: $\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$; presenta discontinuidad en $x=0$

$$\therefore\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{0+\varepsilon}^{8}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-1)^2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}\right)=0-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(4)+0=\frac{9}{2}=4.5$$

b) *Límites de integración infinitos*

i) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a \le x \le k$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_a^k f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\bigg|_0^k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\infty}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(0) = \frac{\pi}{4}$$

ii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $j \le x \le b$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{j\to-\infty} \int_j^b f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{j\to-\infty} \int_j^0 e^{2x}\,dx = \lim_{j\to-\infty} \frac{1}{2}e^{2x}\bigg|_j^0 = \lim_{j\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2(0)} - \frac{1}{2}e^{2j}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-\infty} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

iii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $j \le x \le k$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_a^k f(x)dx + \lim_{j\to-\infty} \int_j^a f(x)dx$$

siempre que <u>ambos</u> limites existan.

Ejemplo.

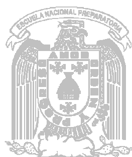
Calcular: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$

Utilizando el cero como referencia, es decir, integrando de 0 a ∞ y de $-\infty$ a 0, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+4x^2}=\lim_{k\to\infty}\int_0^k\frac{dx}{1+4x^2}+\lim_{j\to-\infty}\int_j^0\frac{dx}{1+4x^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}2x\Big|_0^k+\lim_{j\to-\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}2x\Big|_j^0$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0\right)+\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}0-\tan^{-1}(-\infty)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$



APLICACIONES DE LA INTEGRAL

UNIDAD VI

Existen muchos campos del conocimiento en que existen aplicaciones de la integral. Por la naturaleza de este concepto, puede aplicarse tanto en Geometría, en Física, en Economía e incluso en Biología.

Por sólo citar algunos ejemplos, a continuación se mencionan las aplicaciones más conocidas de la integral:

1. Hallar el *área de regiones planas*.
2. Obtener los *volúmenes de sólidos de revolución*.
3. Calcular *volúmenes de sólidos* con secciones conocidas.
4. Determinar la *longitud de arco de una curva*.
5. Examinar el *comportamiento aleatorio* de variables continuas (función de densidad probabilidad).
6. Conocer el *valor promedio de una función*.
7. Hallar *momentos* (fuerzas que ejercen ciertas masa con respecto a un punto) y *centros de masa* o *centroide* (el punto en que un objeto se equilibra horizontalmente).
8. Encontrar la *presión ejercida por un fluido*.
9. Calcular el *trabajo realizado* de mover un objeto de un punto a otro.
10. Obtener *velocidades y aceleraciones* de móviles.
11. Conocer el *superávit del consumidor* (cantidad de dinero ahorrado por los consumidores, al comprar un artículo a un precio dado).
12. Determinar el *flujo sanguíneo* (volumen de sangre que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo) de una persona y su *gasto cardiaco* (volumen de sangre bombeado por el corazón por unidad de tiempo.

A continuación se profundiza en las primeras dos aplicaciones enlistadas.

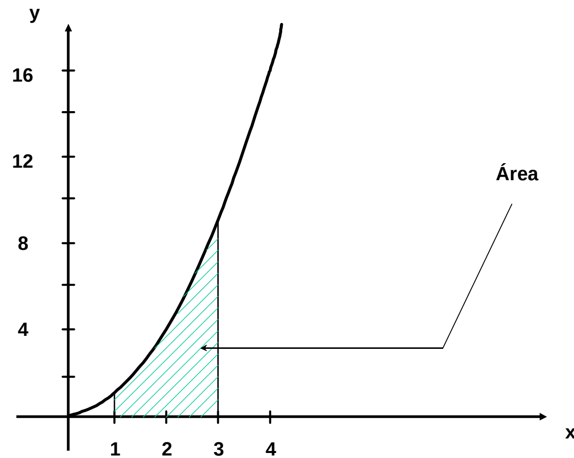
VI.1 CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Para calcular un área plana, se efectúa la siguiente metodología:

1. Se trazan las curvas que limitan el área que se desea conocer.
2. Se identifican los puntos en los que se cortan las curvas.
3. Se determina la zona de la que hay que calcular el área.
4. Se decide que variable conviene integrar
5. Se procede a integrar bajo los límites encontrados.

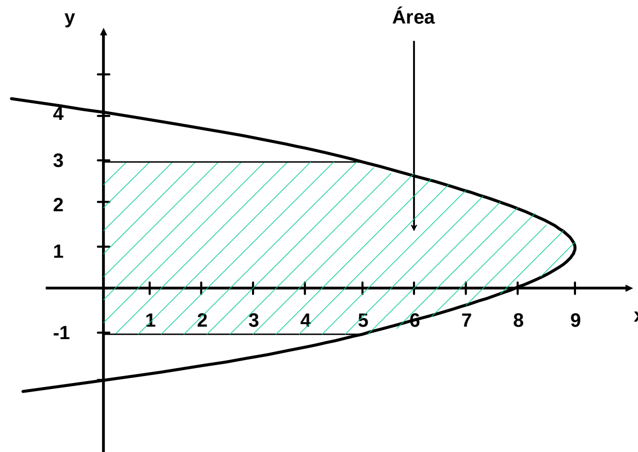
Ejemplos.
Hallar el área limitada por las siguientes condiciones:

1) Curva $y = x^2$, el eje x y por las rectas $x = 1$ y $x = 3$
Solución:



$$A=\int_{1}^{3}x^{2}\,dx=\left.\frac{x^{3}}{3}\right|_{1}^{3}=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}\approx 8.66\,u^{2}$$

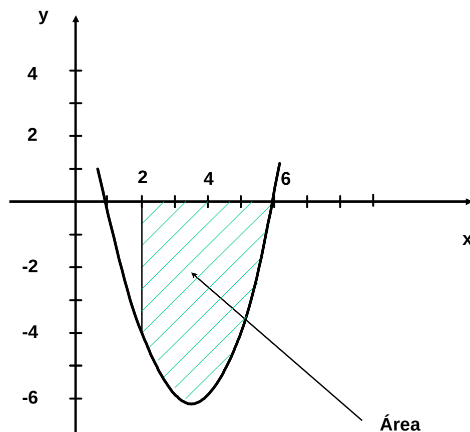
2) El eje y, la curva $x=8+2y-y^{2}$ y por las rectas $y=-1$ y $y=3$
Solución:



$$A=\int_{-1}^{3}\left(8+2y-y^{2}\right)dy=\left.\left(8y+y^{2}-\frac{y^{3}}{3}\right)\right|_{-1}^{3}=\left(24+9-9\right)-\left(-8+1+\frac{1}{3}\right)$$

$$=24-\left(-\frac{20}{3}\right)=\frac{92}{3}\approx 30.66\,u^{2}$$

3) Curva $y=x^{2}-7x+6$, el eje x y por las rectas $x=2$ y $x=6$
Solución:



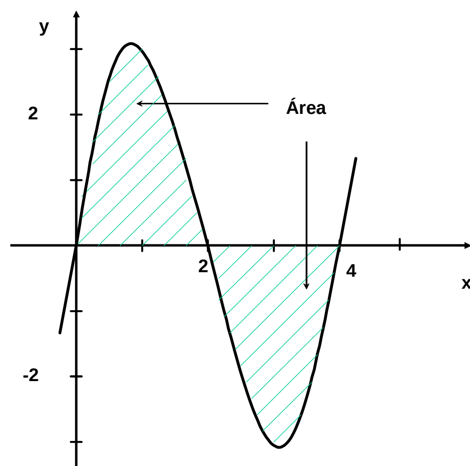
Por situarse debajo del eje de integración (x), debe afectarse todo por un signo negativo.

$$A=\int_2^6 -\left(x^2-7x+6\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+6x\right)\Bigg|_2^6=-\left[\left(\frac{216}{3}-\frac{7}{2}(36)+36\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{7}{2}(4)+12\right)\right]$$

$$=-\left[(72-126+36)-\left(\frac{8}{3}-14+12\right)\right]=-\left[(-18)-\left(\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{56}{3}\approx 18.66\,u^2$$

4) Curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje x

Solución:



La curva corta al eje x en $0,\,2$ y 4

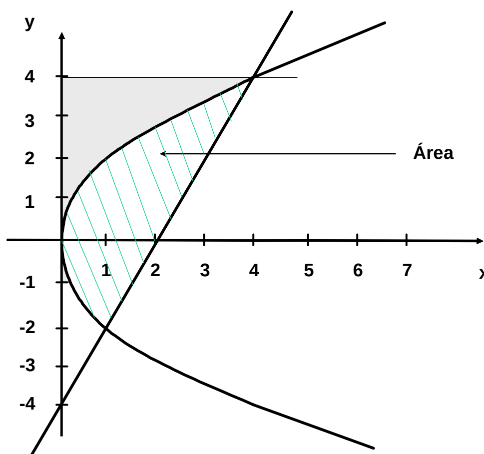
$$\therefore \quad A=\int_0^2\left(x^3-6x^2+8x\right)dx-\int_2^4\left(x^3-6x^2+8x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_0^2-\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_2^4=\left[(4-16+16)-(0)\right]-\left[(64-128+64)-(4-16+16)\right]$$

$$=4+4=8\,u^2$$

5) Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$

Solución:



Despejando x de la ecuación de la recta: $x = \frac{y+4}{2}$ y sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$y^2 = 4\left(\frac{y+4}{2}\right) = 2(y+4) = 2y + 8$$

$y^2 - 2y - 8 = 0$, resolviendo la ecuación: $(y+2)(y-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2, \quad y_2 = 4$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+4}{2} = 4 \quad \therefore \quad P_1(1,-2), \quad P_2(4,4)$$

Área pedida = Área bajo la recta - Área bajo la parábola:

$$A = \int_{-2}^{4} \frac{y+4}{2}\,dy - \int_{-2}^{4} \frac{y^2}{4}dy = \int_{2}^{4} \left(\frac{y}{2} + 2\right)dy - \int_{-2}^{4} \frac{y^2}{4}dy = \left(\frac{y^2}{4} + 2y\right)\Bigg|_{-2}^{4} - \left(\frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{4}$$

$$= [(4+8)-(1-4)] - \left[\frac{64}{12} - \left(-\frac{8}{12}\right)\right] = [12-(-3)] - \left[\frac{72}{12}\right] = 15 - 6 = 9\,u^2$$

6) Hallar el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$

Solución:

Igualando las ecuaciones para obtener los puntos de intersección:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 8x = 0$$

factorizando:

$$x(2x-8) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

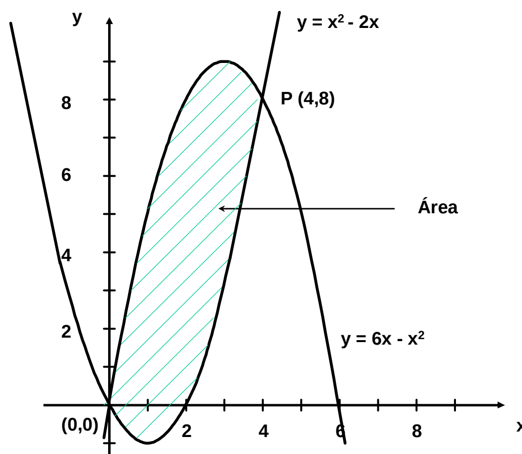
$$2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_1 = 6(0) - 0^2 = 0 - 0 = 0$$

$$y_2 = 6(4) - 4^2 = 24 - 16 = 8$$

$\therefore$ los puntos de intersección son: $P_1(0,0), \quad P_2(4,8)$

Área pedida = Área bajo la parábola 1 - Área bajo la parábola 2:



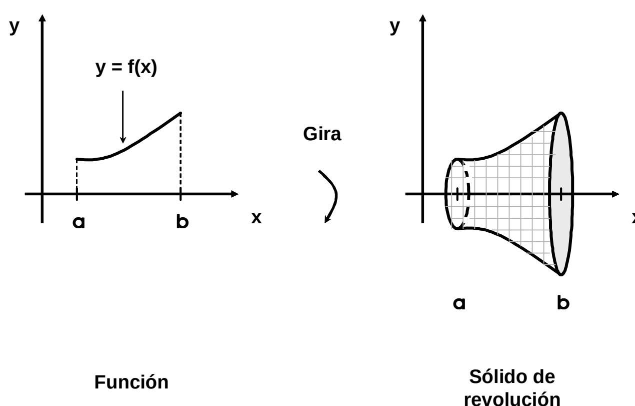
$$A=\int_0^4\left(6x-x^2\right)dx-\int_0^4\left(x^2-2x\right)dx=\left(3x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^4$$

$$=\left[\left(3(16)-\frac{64}{3}\right)-(0-0)\right]-\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-(0-0)\right]=48-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+16=\frac{64}{3}\approx 21.66\,u^2$$

VI.2 VOLÚMENES SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

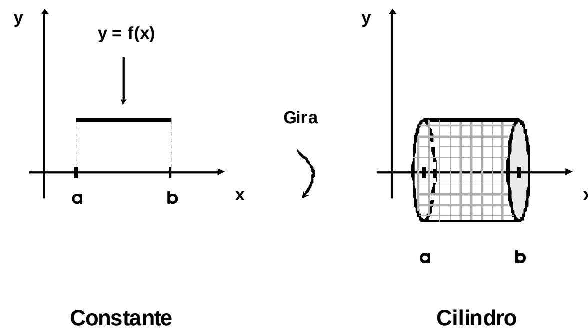
Si una función se gira con respecto a un eje del plano se genera un volumen conocido como *sólido de revolución* y al eje se le llama *eje de revolución*.

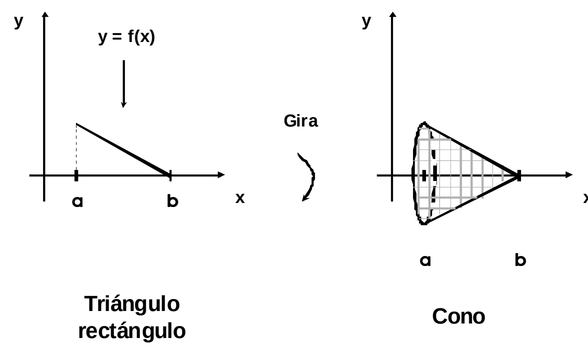
Gráficamente, esto es:

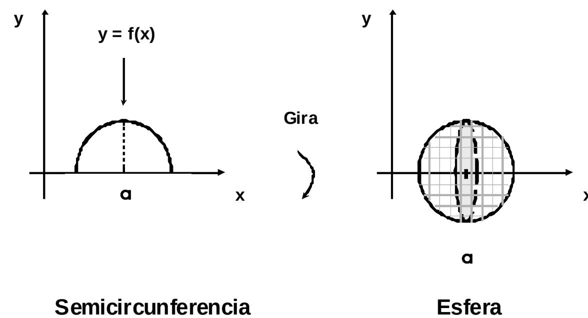


En general, una función puede girarse libremente, por lo que la forma del sólido que se genera depende, tanto de la naturaleza de la función, como del eje de revolución.

En las siguientes gráficas se aprecia como se forman sólidos de revolución conocidos, si se giran funciones muy elementales:







Un volumen del sólido de revolución se conforma de la suma infinita de franjas unitarias de volumen y si se genera haciendo girar a una función $f(x)$ alrededor del eje x, se puede calcular por medio de:

$$V = \int_a^b \pi \cdot \left[f(x) \right]^2 dx$$

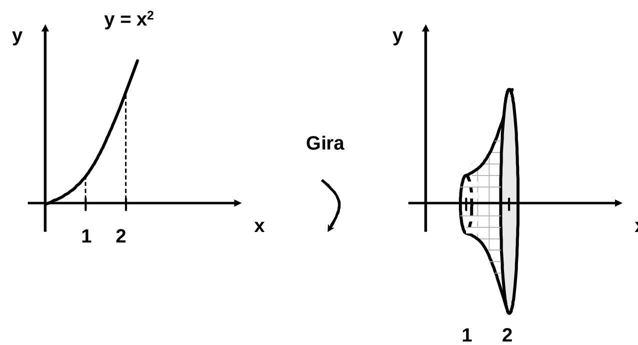
donde a y b representan las rectas que lo limitan, es decir, son los extremos.

Ejemplos.

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar las siguientes funciones con los límites marcados y el eje de revolución dado.

1) $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

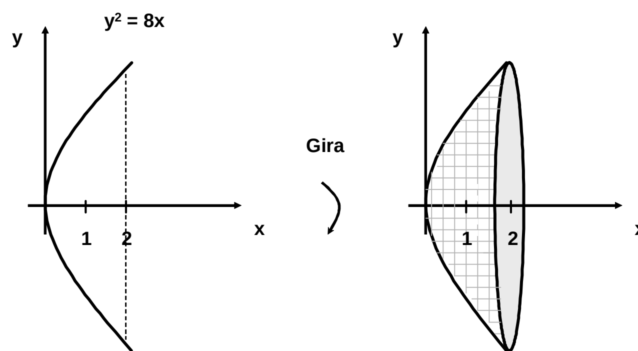
Solución:



$$V = \int_1^2 \pi\left[x^2\right]^2 dx = \int_1^2 \pi x^4\, dx = \left.\frac{\pi x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{32\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{31\pi}{5} \approx 19.47\ u^3$$

2) $y^2 = 8x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$

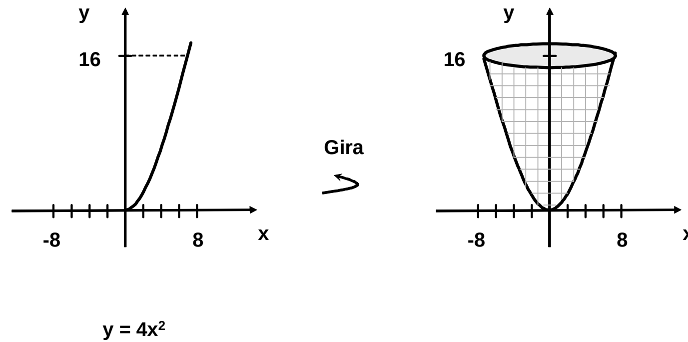
Solución:



$$V = \int_0^2 \pi\left[\sqrt{8x}\right]^2 dx = \int_0^2 \pi\, 8x\, dx = \left.\pi 4x^2\right|_0^2 = 16\pi - 0 = 16\pi \approx 50.26\ u^3$$

3) $y = 4x^2$, el eje y y las rectas $y = 0$ y $y = 16$

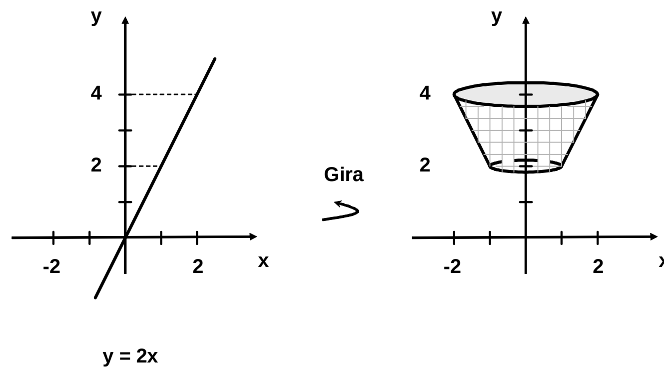
Solución:



$$V = \int_0^{16} \pi \left[\sqrt{\frac{y}{4}} \right]^2 dy = \int_0^{16} \frac{\pi\, y}{4} dy = \frac{\pi\, y^2}{8} \bigg|_0^{16} = \frac{256\pi}{8} - 0 = 32\pi \approx 100.53\, u^3$$

4) $y = 2x$, el eje y y las rectas $y = 2$ y $y = 4$

Solución:



$$V = \int_2^{4} \pi \left[\frac{y}{2} \right]^2 dy = \int_2^{4} \frac{\pi\, y^2}{4} dy = \frac{\pi\, y^3}{12} \bigg|_2^{4} = \frac{64\pi}{12} - \frac{8\pi}{12} = \frac{56\pi}{12} \approx 14.66\, u^3$$

VI.3 ECUACIONES DIFERENCIALES SENCILLAS

VI.3.1 ORDEN, GRADO Y SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una ecuación que contiene derivadas o diferenciales se llama *ecuación diferencial*.

Ejemplos.

1) $3x\frac{dy}{dx}+8y=7$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-2e^x\frac{dy}{dx}+y\frac{dy}{dx}=x^3$

3) $F=m\cdot\frac{d^2x}{dx^2}$ (segunda ley de Newton)

El *orden* de una ecuación diferencial es igual al de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación.

Ejemplos.

1) $\frac{dy}{dx}+3\frac{d^2y}{dx}+4y=0$ (ecuación diferencial de segundo orden)

2) $x\frac{d^3y}{dx^3}-8xy\frac{d^4y}{dx^4}-5x=0$ (ecuación diferencial de cuarto orden)

El *grado* de una ecuación diferencial es el exponente mayor de la derivada de mayor orden de la ecuación.

Ejemplos.

1) $\frac{d^2y}{dx^2}+(2xy)^5+\left(7\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+9x=0$ (ecuación diferencial de tercer orden y segundo grado)

2) $4\frac{d^3y}{dx^3}-8x-9y\frac{d^5y}{dx^5}-11\left(\frac{dy}{dx}\right)^8-12=0$ (ecuación diferencial de quinto orden y primer grado)

3) $6\frac{d^2y}{dx^2}-14xy-8\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3-15\frac{dy}{dx}=0$ (ecuación diferencial de cuarto orden y tercer grado)

Una solución de una ecuación diferencial es aquella que satisface a la ecuación, por ejemplo, si se tiene:

$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-4y=0$, una solución es: $y=8e^x+3e^{-4x}$, esto es:

$$\frac{dy}{dx}=8e^x-12e^{-4x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=8e^x+48e^{-4x}$$

sustituyendo en la ecuación:

$$8e^x+48e^{-4x}+3\left(8e^x-12e^{-4x}\right)-4\left(8e^x+3e^{-4x}\right)$$

$$=8e^x+48e^{-4x}+24e^x-36e^{-4x}-32e^x-12e^{-4x}=0$$

VI.3.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES (DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN)

Dependiendo del tipo de ecuación diferencial, conviene aplicar un método de resolución particular. Por su sencillez, los más utilizados son el de la obtención de raíces del polinomio y el de separación de variables.

En el primer caso, suele utilizarse el operador D en lugar de la derivada, a fin de que cada raíz a_i del polinomio formado, tenga la forma $C_i\, e^{a_i x}$, donde C_i son constantes. Por su parte, la separación de variables, se efectúa a fin de facilitar su integración.

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $5\dfrac{dy}{dx}+8y=0$

Solución:

$$(5D+8)y=0 \quad\Rightarrow\quad 5D=-8 \quad\Rightarrow\quad D=-\frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad y=C_1\, e^{-\frac{8}{5}x}$$

comprobación: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{8}{5}C_1\, e^{-\frac{8}{5}x}$

sustituyendo: $5\left(-\dfrac{8}{5}C_1 e^{-\frac{8}{5}x}\right)+8\left(C_1 e^{\frac{-8}{5}x}\right)=-8C_1 e^{-\frac{8}{5}x}+8C_1 e^{-\frac{8}{5}x}=0$

2) $4\dfrac{dy}{dx}-11y=0$

Solución:

$$(4D-11)y=0 \quad\Rightarrow\quad 4D=11 \quad\Rightarrow\quad D=\frac{11}{4}$$

$$\therefore \quad y=C_1\, e^{\frac{11}{4}x}$$

comprobación: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{11}{4}C_1\, e^{\frac{11}{4}x}$

sustituyendo: $4\left(\dfrac{11}{4}C_1 e^{\frac{11}{4}x}\right)-11\left(C_1 e^{\frac{11}{4}x}\right)=11C_1 e^{\frac{11}{4}x}-11C_1 e^{\frac{11}{4}x}=0$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+11\dfrac{dy}{dx}+28y=0$

Solución:

$$\left(D^2+11D+28\right)y=0 \quad\Rightarrow\quad (D+4)(D+7)y=0 \quad\Rightarrow\quad D_1=-4, \quad D_2=-7$$

$$\therefore \quad y=C_1\, e^{-4x}+C_2\, e^{-7x}$$

4) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-24y=0$

Solución:

$\left(D^2+2D-24\right)y=0 \quad \Rightarrow \quad (D+6)(D-4)y=0 \quad \Rightarrow \quad D_1=-6, \quad D_2=4$

$\therefore \quad y=C_1e^{-6x}+C_2e^{4x}$

5) $8(y+4)dx-(x-2)dy=0$

Solución:

$8(y+4)dx=(x-2)dy$

si se separan las variables se tiene:

$\frac{8\,dx}{x-2}=\frac{dy}{y+4}$, integrando: $\int\frac{8\,dx}{x-2}=\int\frac{dy}{y+4}$

$8\ln|x+2|=\ln|y+4|$, elevando a la e:

$e^{8\ln|x+2|}=e^{\ln|y+4|}$

$e^{8\ln|x+2|}=|y+4|$

$\therefore \quad y=e^{8\ln|x+2|}-4$

6) $y\,dx+\left(x^2+1\right)dy=0$

Solución:

$y\,dx=-\left(x^2+1\right)dy$

separando las variables:

$\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{dy}{y}$, integrando: $\int\frac{dx}{x^2+1}=-\int\frac{dy}{y}$

$\tan^{-1}x=-\ln|y|$, elevando a la e:

$e^{\tan^{-1}x}=e^{-\ln|y|}$

$e^{\tan^{-1}x}=-y$

$\therefore \quad y=-e^{\tan^{-1}x}$